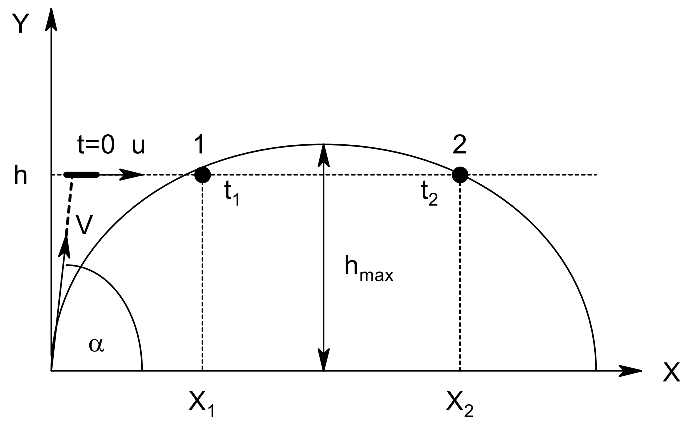
אולימפיסיקה 7

פתרונות

1. נבחר מערכת צירים כך שראשיתה נמצאת בנקודה בה האבן נזרקה. רגע $t=0$ יהיה הרגע בו האבן נזרקה. נניח שהברווז עף בגובה h. האבן פוגעת בברווז אם ברגעי חיתוך מסלולי תנועת הברווז (קו ישר) והאבן (פרבולה) שני גופים נמצאו באותו מקום X_1 או X_2 ראה ציור).



$$h = Vt\sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = 0 \Rightarrow t^2 - \frac{2V\sin\alpha}{g}t + \frac{2h}{g} = 0$$

$$t_1 = a - \sqrt{a^2 - \frac{2h}{g}} \;,\; t_2 = a + \sqrt{a^2 - \frac{2h}{g}} \;,\; a = \frac{V\sin\alpha}{g} \qquad (1)$$

נסמן X_1 : קואורדינטה של האבן; X_1^* : קואורדינטה של הברווז

$$X_1 = Vt_1\cos\alpha \;,\; X_1^* = \frac{h}{\tan\alpha} + ut_1 \;,$$

$$X_2 = Vt_2\cos\alpha \;,\; X_2^* = \frac{h}{\tan\alpha} + ut_2 \;,$$

$$X_1 = X_1^* \Rightarrow \sqrt{a^2 - \frac{2h_1}{g}} = a - \frac{h_1}{b\tan\alpha} \;,\; b = V\cos\alpha - u \qquad (2)$$

$$h_1 = \frac{2\left(V\cos\alpha - u\right)u\tan^2\alpha\Big)}{g}$$

$$X_2 = X_2^* \Rightarrow \sqrt{a^2 - \frac{2h_2}{g}} = \frac{h_2}{b\tan\alpha} - a \ \ , \ \ h_2 = h_1 \qquad (3)$$

מביטוי (1) פשוט למצוא את תנאי ברור ל- h :

$$a^2 - \frac{2h}{g} \geq 0 \Rightarrow \frac{V^2 \sin^2\alpha}{g^2} \geq \frac{2h}{g} \Rightarrow h \leq \frac{V^2 \sin^2\alpha}{2g} = h_{\max}$$

2. בזמן הארקה הפוטנציאל =0 .

כאשר בוצעה ההארקה של הכדור הראשון - הכדור השני יוצר עליו פוטנציאל $V = q / 4\pi\varepsilon_0 R$. על הכדור הראשון אמור להיווצר מטען, שיוצר אותו הפונציאל (בערך מוחלט) : $q_1 = -V \cdot r \cdot 4\pi\varepsilon_0 = -qr / R$. המטען הזה יוצר על הכדור השני פוטנציאל $V' = q_1 / 4\pi\varepsilon_0 R = -qr / 4\pi\varepsilon_0 R^2$. על-מנת לנטרל (קומפנסציה) של הפוטנציאל הזה על הכדור השני בזמן ביצוע הארקה אמור להיות עליו מטען

$$q_2 = -4\pi\varepsilon_0 V' r = qr^2 / R^2$$

עכשיו, הפוטנציאל של הכדור הראשון בסיום הניסוי:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}(1 - \frac{r^2}{R^2}) \approx -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

3. אחרי הבלימה הלוויין נע במסלול אליפטי שמחצית הציר הגדול שווה ל- $\frac{R+R_E}{2}$. אם לסמן את זמן המחזור של לוויין במסלול אליפטי דרך T , אז זמן הנפילה של לוויין מרגע הבלימה שווה ל- $t = \frac{T}{2}$. לפי החוק השלישי של קפלר נקבל:

$$\frac{T^2}{T_o^2} = \frac{\left(R + R_E\right)^3}{8R^3}$$

כאשר T_o הוא זמן המחזור של לוויין במסלול מעגלי.

לקבלת T_o נשתמש בחוק השני של ניוטון:

$$\frac{mV^2}{R} = \frac{GmM_E}{R^2} = \frac{mgR_E^2}{R^2}$$

יוצא מכאן ש- $V = R_E\sqrt{\frac{g}{R}}$. עכשיו קל למצוא את T_o ו- T:

$$T_o = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{R_E}\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{2\pi}{R_E}\sqrt{\frac{R^3}{g}}$$

$$T = T_o\sqrt{\frac{\left(R+R_E\right)^3}{8R^3}} = \frac{2\pi}{R_E\sqrt{g}}\left(\frac{R+R_E}{2}\right)^{3/2}$$

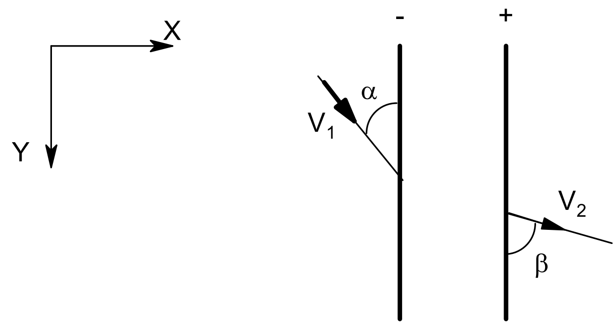
בסופו של דבר

$$t = \frac{\pi}{R_E\sqrt{g}}\left(\frac{R+R_E}{2}\right)^{3/2}$$

<u>שאלת בונוס</u>

4. נחליף באופן דמיוני גבול הפרדה של שני חצאי מרחבים בקבל לוחות (ראה ציור). רכיבים של מהירויות על ציר ה- y אינם משתנים: $V_{1y} = V_{2y}$

לפי חוק שימור האנרגיה



$$\frac{mV_{2x}^2}{2} - \frac{mV_{1x}^2}{2} = e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)$$

$$V_{2x}^2 = V_{1x}^2 + \frac{2e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{m}$$

$$\frac{V_{2x}^2}{V_{1x}^2} = 1 + \frac{2e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{mV_{1x}^2}$$

$$\frac{V_{2x}^2}{V_{2y}^2}\cdot\frac{V_{2y}^2}{V_{1x}^2} = 1 + \frac{2e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{mV_1^2\sin^2\alpha}$$

$$\frac{V_2^2\sin^2\beta}{V_2^2\cos^2\beta} - \frac{V_{1y}^2}{V_{1x}^2} = \tan^2\beta\cdot\frac{V_1^2\cos^2\alpha}{V_1^2\sin^2\alpha} = \frac{\tan^2\beta}{\tan^2\alpha}$$

$$\tan^2\beta = \tan^2\alpha\left[1 + \frac{2e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{mV_1^2\sin^2\alpha}\right]$$

$$\tan\beta = \tan\alpha\sqrt{1 + \frac{2e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right)}{mV_1^2\sin^2\alpha}}$$

רואים שהתוצאה אינה תלויה במרחק בין הלוחות, אפילו אם המרחק שואף ל-0.