Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

9 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

כנס ירושלים התשיעי למחקר בחינוך מתמטי

ספר מאמרי הכנס

עורכים: בועז זילברמן, נעמי חן-חדד, תקוה עובדיה

תוכן עניינים

שיח מחקרי

קבוצות דיון, סימפוזיון ופורום חוקרים צעירים

מיצגים

בס"ד

דבר יושבי ראש הכנס

If people do not believe that mathematics is simple, it is only because they do not realize how complicated life is. John von Neumann

שלומות לקהיליית החינוך המתמטי בישראל,

ברוכות הבאות וברוכים הבאים לכנס ירושלים התשיעי, המקבץ את קהיליית החינוך המתמטי בישראל ליומיים של שיח מחקרי.

בכנס ירושלים השמיני, חלק משיחות המסדרון נסבו סביב מחלה שנמצאה במרחק אלפי קילומטרים מאתנו, מבלי שנעלה בדעתנו שנגיף הקורונה היה כבר בדרכו אלינו. השנה, בשל מגפת Covid19 העולמית, הכנס מתקיים לראשונה במתכונת מקוונת מלאה (ובתקווה ובתפילה שזו הפעם האחרונה מסיבות אלו).

ההחלטה לוותר על מפגש פנים אל פנים לא היתה קלה – אך היתה בלתי נמנעת. עם זאת, ניסינו להפוך את החסרון של העדר המפגש הבלתי־אמצעי ליתרון יחסי על ידי הרחבת מעגל המציגים והמשתתפים גם לעמיתים שנמצאים בעולם וישמחו לחוות יחד אתנו את הכנס. אי לכך אנחנו זוכים לארח בכנס שני עמיתים שנמצאים בשני קצות הגלובוס – ד"ר אורלי בוכבינדר מאוניברסיטת ניו־המפשייר (ארה"ב) וד"ר איגור' קונטורוביץ' מאוניברסיטת אוקלנד (ניו זילנד). בנוסף, הכנס המקוון מאפשר הסרטה בזמן אמת של כל המושבים והעלאתם לאתר הכנס. כולנו מכירים את תחושת ההחמצה כשצריך לבחור בין כמה מושבים מקבילים מרתקים – ואנו מקווים שההקלטות יספקו טעימה של ההרצאה או הדיון שפספסתם.

ספר הכנס המונח לפניכם מספק הצצה למגוון היצירות שבחזית המחקר בחינוך מתמטי בישראל. בהתאם, חלק מההצעות מתייחסות למשבר הקורונה והתבטאותו בהוראת מתמטיקה ובהכשרת מורים. אחרות נסובות סביב חשיבה מתמטית מגיל הגן ועד אוניברסיטה – מאריתמטיקה ועד חשבון דיפרנציאלי, תלמידים בעלי הישגים גבוהים ונמוכים, מחקרי הוראה ומורים, היבטים של התפתחות מקצועית, חשיבה גיאומטרית במישור ובמרחב, יישום כלים טכנולוגים בהוראה, הוכחות והנמקות, יצירתיות, ועוד ועוד. מצאנו בהצעות הכנס נושאים מעניינים לדיון פורה, למידה וחידוש. אנו מאמינים שכל משתתף ומשתתפת ימצאו את המושבים המלמדים עבורם.

91 חוקרות וחוקרים ממגוון אוניברסיטאות, מכללות ומוסדות נוספים, בארץ ובעולם, הגישו הצעות להצגה בכנס – החל בסטודנטים לתארים מתקדמים, דרך בתר־דוקטורנטים, וכלה בעבודות של חוקרות וחוקרים עם ניסיון רב במחקר. במסגרת הכנס יוצגו שלוש הרצאות מליאה, 23 דיווחי מחקר, 15 שיחי מחקר, שתי קבוצות דיון, סימפוזיון אחד ושמונה מיצגים. שיפוט ההצעות התבצע על ידי 51 חוקרים וחוקרות מהקהילייה היקרה שלנו אשר הסכימו להתפנות למלאכת ביקורת העמיתים.

אחת מקבוצות הדיון הורחבה השנה לכדי מושב מיוחד לחוקרים צעירים המתקיים לפני הפתיחה הרשמית של הכנס. אנו מקווים שזו תהיה תחילתה של מסורת שבה חוקרות וחוקרים הנמצאים בתחילת הדרך האקדמית ייפגשו יחדיו לדיון ולמידה בענייני מחקר הרלוונטים עבורם כחברי קהילה פעילה בתוך קהילת המחקר בחינוך מתמטי.

את הכנס הנוכחי, כמו קודמיו, בנו רוב חברי הקהילה, ועל כן אנו מודים לכולם על חלקם בארגונו:

תודה לחברי וועדת הכנס: איריס, ג'ייסון, יניב ותמרה, על העצות המועילות, גיוס המשאבים והתמיכות, ארגון השיפוטים ויצירת קשר עם החוקרים לאורך כל התהליך.

תודה מיוחדת לנעמי חןחדד, שהיוותה אשת הקשר בין כל הגורמים שמרכיבים את הכנס הנוכחי, שמלכדת את הקהילה באמצעות פרסום מידע מקצועי רלוונטי, ושבהחלט מהווה את לב הקהילה – גם מעבר לענייני כנסי ירושלים.

תודה למארחים הקבועים שלנו במרכז האקדמי לב, פרופ' קנת הוכברג ופרופ' נח דנא-פיקרד, על שסייעו לנו בכל הלוגיסטיקה שמאחורי הקלעים של כנס זה. אנו מאחלים לעצמנו לשוב בכנסים הבאים מהמרחב הפיזיטלי אל המרחב הפיזי, ולחגוג עשור לכנס בירושלים.

דרור גרין אמר: "אין לנו כוח לשלוט במציאות, אבל יש לנו מיומנויות המאפשרות לנו להתאים את עצמנו ולהסתגל אליה". הכנס המקוון הנוכחי הינו דוגמא למיומנות שלנו להתאים את עצמנו למציאות ולהסתגל אליה (זמנית). אנו מודים לכל המוסדות שתמכו בהוצאות הכנס ואפשרו לנו לקיים אותו ברמה גבוהה: אוניברסיטת בר־אילן, אוניברסיטת תל־אביב, הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל, מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית, מכון ויצמן למדע, מכללת אורנים, מכללת סמינר הקיבוצים והמרכז האקדמי לב.

אנו מודים לניר נחום ושרי רגב מהאגף הטכנולוגי במכללת אורנים שבנו את המרחב הפיזיטלי האסתטי והנגיש לכנס.

בברכת כנס מהנה, מעשיר, מחכים, וכמובן – בריא ובטוח לכולנו,

תקוה עובדיה ובועז זילברמן, יו"ר הכנס

חברי ועדת התכנית (לפי סדר הא"ב)

ד"ר תמרה אבישר, מכון דוידסון לחינוך מדעי

ד"ר יניב ביטון, שאנן – המכללה הדתית לחינוך; המרכז לטכנולוגיה חינוכית

ד"ר ג'ייסון קופר, מכון ויצמן למדע

ד"ר איריס שרייבר, אוניברסיטת בר־אילן; מכללת סמינר הקיבוצים

חברי הוועדה המארגנת (לפי סדר א"ב):

פרופ' נח דנא-פיקארד, המרכז האקדמי לב

גב' נעמי חןחדד, מכללת סמינר הקיבוצים

פרופ' מיכל טבח, אוניברסיטת תל-אביב

מר יעקב קולטקר, המרכז האקדמי לב

רשימת שופטי הכנס (לפי סדר הא"ב)

אבי ברמן

אביטל אלבוים-כהן

אנה הופמן

אוסמה סוידאן

אורטל ניצן-תמר

איבי קדרון

אילנה וייסמן

איה שטיינר

אלון פינטו

אליק פלטניק

אנטולי קורופטוב

אסתר לוינסון

בוריס קויצ'ו

ברכה קרמרסקי

בת שבע אילני

ג'והיינה עוואדה שחברי

גיל שוורץ

דינה תירוש

דפנה אליאס

נצה מובשוביץ הדר

זהבית כהן

טומי דרייפוס

ילנה נפתלייב

יעל נוריק

ליה נח-סלע

מיכל איילון

מיכל טבח

מיכל ירושלמי

מיקה גבל

מירב ויינגרדן

מירלה וידר

משה סטופל

נדב ארנפלד

נעמה בן דור

סבינה סגרה

סיגל רותם

עינת הד-מצוינים

עירית לביא

עפרה עפרי

פסיה צמיר

צביה מרקוביץ

צילה ירחי

קרני שיר

רוני קרסנטי

רותי ברקאי

רותי סגל

רותם עבדו

רז הראל

שולה וייסמן

שושי דורפברגר

שי אולשר

Jerusalem Conference on Research in Mathematics Education

9 JCRME

כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי

לתכנית הכנס לחצו כאן >>

הרצאות מליאה

זמן מהירות ודרך – למידה והוראה ברשת החברתית

<u>רותי סגל</u>, שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך; אורנים – המכללה האקדמית לחינוך

המועצה הלאומית למורים למתמטיקה (NCTM, 2000, 2019) מדגישה את חשיבותה של סביבת כיתה עשירה בתקשורת (communication) לפיתוח תהליכי למידה, חשיבה והבנה. תקשורת בין כל הגורמים הפועלים בסביבת הלמידה מזמנת ביטוי של רעיונות מתמטיים, גיבוש והערכה של דרכי חשיבה ופיתוח דרכי הנמקה. במהלך השנים האחרונות הרשתות החברתיות (social networks) כדוגמת Facebook ו־WhatsApp משולבות באופנים שונים כפלטפורמות המזמנות תקשורת כחלק מתהליכי למידה של תלמידים ושל פרחי הוראה וכחלק מתהליכי התפתחות מקצועית של מורים.

מחקרים בחינוך מתמטי מהשנים האחרונות מצביעים על הפוטנציאל הטמון בלמידה והוראה ברשתות החברתיות לפיתוח למידת עמיתים, חשיבה ביקורתית ודרכי הנמקה, לזיהוי קשיי הלומדים ועוד. בשנה האחרונה הואצו תהליכים אלו כחלק מדרכי ההתמודדות של הלומדים ושל המורים עם התפשטות נגיף הקורונה.

בהרצאה זו אציג ממצאים חלקיים ממחקר שהתקיים טרם התפרצות הקורונה במסגרת פרויקט "בגרופ" (הממשיך לפעול גם בימים אלו), המזמן למידה משולבת (blended learning) ברשת החברתית כדי לסייע לתלמידי החטיבה העליונה ברחבי הארץ בטרם הגשתם לבחינת הבגרות במתמטיקה. הפרויקט פועל בשיתוף פעולה עם המרכז לטכנולוגיה חינוכית ועם משרד החינוך.

מטרת המחקר הייתה בין היתר לענות על שאלות מחקר אלה: מהי התרומה של למידה משולבת ברשת החברתית לתהליכי הלמידה של התלמידים? מהי תרומתה להרחבת הידע והמיומנויות של המורים על פי תפיסתם?

ממצאי המחקר מצביעים על הפוטנציאל הטמון בתהליכי למידה והוראה ברשת החברתית להתפתחותה של קהילה לומדת של תלמידים ושל מורים, המעודדת למידה שיתופית, לימוד מתמטיקה בכל מקום, למידה מהירה ולמידה מתמטית אנונימית. בנוסף הלמידה וההוראה ברשת החברתית מסייעת להעלאת המוטיבציה של התלמידים, לשיפור בתחושת המסוגלות שלהם, להתפתחות של למידה רגשית־חברתית לצד טיפוח חוויות ותפיסות עצמי ואחר חיוביות, וכן לפיתוח ידע ומיומנויות להוראה רגשית־חברתית. בהרצאה ארחיב על כך ואציג עדויות המבוססות על ניתוח כמותי ואיכותני של הנתונים. הממצאים עשויים לשמש קרקע פורייה לעוסקים בחינוך מתמטי ולקובעי המדיניות בעיצוב סביבות למידה בהמשך הדרך.

הכשרת מורים להוראת מתמטיקה באמצעות שילוב הוכחות והנמקות

אורלי בוכבינדר, אוניברסיטת ניו המפשיר, ארה"ב

הכשרת כוח הוראה איכותי היא סוגיה מרכזית במחקר בחינוך מתמטי. מורים זקוקים לידע, עמדות והתנסויות ספציפיים על מנת לשפר את ההתנסויות המתמטיות של התלמידים. קל אמנם להסכים עם טענה כזו, אך היישום שלה בפועל מעלה מספר סוגיות לא טריויאליות. למשל, מהו הידע שלו זקוקים מורים? אילו עמדות היינו רוצים שהמורים יפתחו? אילו התנסויות נספק לפרחי הוראה על מנת לסייע להם בפיתוח ידע ועמדות אלו? כיצד נעריך אם אכן המטרות הושגו?

הרצאה זו מתארת מחקר בן שלוש שנים שנערך באוניברסיטת ניו המפשיר בארה"ב, במימון של קרן המדע הלאומית של ארה"ב (National Science Foundation). מטרות המחקר היו כפולות: בניית סביבה לימודית להכשרת מורי חט"ב ותיכון בהוראת מתמטיקה עם דגש על שילוב הוכחות והנמקות, לצד חקר של יעילותה של סביבה לימודית זו ושל השפעותיה על הידע של מורים (Buchbinder & McCrone, 2020).

שלב הפיתוח כלל יצירת קורס חדש שעוסק בשילוב של הוכחות והנמקות בהוראת מתמטיקה. בחרנו בנושא זה משלושה טעמים: ראשית, זהו נושא רוחב, שניתן ליישמו בכל נושא מתמטי ובכל שכבת גיל של תלמידים, תוך התאמה לרמה שלהם. שנית, 30 שנות מחקר חינוכי בתחום הראו שהוא מהווה קושי לתלמידים בכל הגילאים. למעשה, הועדה החינוכית של האיגוד האירופי למתמטיקה הצביעה על קשיים אלה כדוגמא ל"ממצא מוצק" (Solid finding) (Education Committee of the European Mathematical Society, 2011). שלישית, למרות האמור לעיל יש מעט מאוד התערבויות מבוססות מחקר שנעשות בכיתות, או מחקרים כמו שלנו, שעוסקים בהכשרת פרחי הוראה לשילוב הוכחות והנמקות כמנוף לשיפור למידה בכיתות.

הקורס *הוכחות והנמקות מתמטיות למורי חט"ב וחט"ע* (Mathematical Reasoning and Proving for Secondary Teachers) כלל ארבע יחידות, כל אחת בת שלושה שבועות: (א) הוכחות והנמקות כתהליך, (ב) טענות אם-אז, (ג) טענות אוניברסליות וקיום, (ד) הנמקה עקיפה והוכחות בשלילה. תכנון הקורס על כל פעילויותיו נשען על מחקרים קיימים על למידה של מורים והמלצות של ארגונים מקצועיים (למשל, American Federation of Teachers 2002; Association of Mathematics Teacher Educators, 2017).

בכל יחידה, פרחי הוראה עסקו בשלושה סוגי פעילויות: (1) רענון וחיזוק הידע המתמטי שלהם בתת-הנושא העומד במרכז היחידה. (2) הרחבת הידע הפדגוגי שלהם לגבי תפישות של תלמידים בתת-הנושא וזיהוי הזדמנויות לשילוב הנושא בתכנים לימודיים. (3) פיתוח מערך שיעור שמשלב הוכחות והנמקות עם נושא מתמטי מסויים מתכנית הלימודים (חט"ב או חט"ע). לאחר מכן, פרחי הוראה לימדו את השיעור שלהם בבתי ספר האזוריים לקבוצות קטנות של תלמידים ותיעדו את ההוראה שלהם באמצעות מצלמות וידאו °360 המתעדות את המורה ואת התלמידים הסובבים אותו. בשלב הבא, פרחי הוראה צפו בשיעורים שלהם וכתבו דיווח רפלקטיבי על תהליך ההוראה. תהליך זה חזר על עצמו, כאמור, ארבעה פעמים במהלך הסמסטר בכל יחידה ויחידה.

המחקר הנלווה נעשה בשיטת מחקר מבוסס־עיצוב (design-based research) שבו פיתוח ומחקר שזורים זה בזה ומתבצעים בצורה איטרטיבית (Edelson, 2000). זהו מחקר גישוש, שאינו מבוסס על השוואה עם קבוצת ביקורת, אלא מטרתו להתבונן פנימה בתהליכים לימודיים, לקשר אותם להיבטים עיצוביים של הסביבה הלימודית ולהשתמש בתוצאות המחקר על מנת לשפר את הסביבה הלימודית באופן איטרטיבי. כלי המחקר כללו שני שאלונים לגבי הוכחות והנמקות – שאלון ידע מתמטי-פדגוגי ושאלון עמדות. שאלונים אלה פותחו לצורך המחקר וניתנו לפרחי הוראה לפני ואחרי הקורס. כלי מחקר נוספים היו מערכי שיעור שפיתחו פרחי הוראה, צילומי וידאו °360 של שיעוריהם, משימות ודפי עבודה שמילאו פרחי הוראה במהלך פעילויות בקורס, ווידאו של פרחי הוראה במהלך מפגשי הקורס.

בהרצאה, אציג ממצאים שנחשפו במהלך שלוש שנות המחקר, המצביעים על שיפור בידע מתמטי ופדגוגי של פרחי הוראת מתמטיקה בשילוב הוכחות והנמקות. כמו כן, אציג ממצאים שקשורים לקשיים ספציפיים של פרחי הוראה הכרוכים בשילוב של הוכחות והנמקות בכיתות. לסיום, אתייחס למחקר המשך, שנמצא בשלביו הראשונים, שעוסק בליווי מורים צעירים, בוגרי הקורס *הוכחות והנמקות מתמטיות למורי חט"ב וחט"ע* הן במהלך שנת ההתנסות בהוראה והן במהלך השנתיים הראשונות של הוראה עצמאית בכיתות. מחקר חדש זה יאפשר לזהות קיום של השפעות ארוכות טווח של ההתנסויות בקורס זה, לבחון האם וכיצד מורים צעירים מיישמים בכיתות שלהם פעילויות המשלבות הוכחות והנמקות בהוראת מתמטיקה, ולחקור גורמים שתומכים או מעכבים יישום של הוכחות והנמקות בהוראת מתמטיקה.

רשימת מקורות

American Federation of Teachers. (2002). Principles for professional development: AFT's guidelines for creating professional development programs that make a difference. Washington, DC: Author.

Association of Mathematics Teacher Educators. (2017). Standards for Preparing Teachers of Mathematics. Available online at https://amte.net/standards

Buchbinder, O. & McCrone, S. (2020). Preservice Teachers Learning to Teach Proof through Classroom Implementation: Successes and Challenges. Journal of Mathematical Behavior, 58, 100779. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100779

Edelson, D. C. (2002). Design research: What we learn when we engage in design. Journal of the Learning Sciences, 11(1), 105-121.

Education Committee of the European Mathematical Society. (2011). "Solid findings" in mathematics education. EMS Newsletter, 81, 46–48.

Acknowledgments

המחקר בוצע בשיתוף פעולה עם Prof. Sharon McCrone

This research was supported by the National Science Foundation, Award No. 1711163. The opinions expressed herein are those of the authors and do not necessarily reflect the views of the National Science Foundation.

נקודות אי קוהרנטיות במתמטיקה מנקודת מבט של תלמידים, מורים, ומעצבי הוראה ולמידה

איגור' קונטורוביץ', אוניברסיטת אוקלנד, ניו זילנד

רבים מתארים את המתמטיקה כגוף ידע קוהרנטי שבו מושגים ותהליכים אופייניים משתלבים למארג אחיד ועיקבי (למשל, Thompson, 2013; Wu, 2011). יחד עם זאת, המסע המתמטי והחינוכי של תלמידי בית ספר ואוניברסיטה כולל מעברים רבים בין מה שנראה כ"מתמטיקות" שונות (Kontorovich, 2018a). המעברים מאריתמטיקה לאלגברה, מהנמקות להוכחות וממתמטיקה בית־ספרית לאוניברסיטאית הם בין הדוגמאות למעברים כאלה. המעברים בחינוך מתמטי זכו לתשומת לב רבה מנקודות מבט תיאורטיות שונות, כולל קוגניטיבית, אפיסטמולוגית, סוציו־תרבותית ומוסדית (לסקירה מקיפה ראו Gueudet, Bosch, diSessa, Kwon, Verschaffel, 2016).

בהרצאה זו, אשען במסגרת הקומוגניטיבית (ראו Sfard, 2008 לטקסט המקורי ונחליאלי וטבח, 2016 לגרסה העברית). מסגרת זו רואה את המתמטיקה כשיח הכולל דרכים ייחודיות לדיבור ולעשייה, כאשר הייחודיות הזו קשורה גם לאובייקטים שבמוקד השיח וגם לקהיליות שמשתתפות בו. בכך, קומוגניציה מאפשרת לפרש נקודות אי־קוהרנטיות – קרי אי־הסכמות ומתחים בין "מתמטיקות" – כהבדלים לגיטימיים ואף צפויים בין השיחים. פרשנות זאת הופכת את נקודות אי־הקוהרנטיות לחלק מגורלם של כל אלה שמשתתפים בשיחים המזוהים עם המתמטיקה.

מספרים ממשיים ומרוכבים הם הדוגמה המרכזית של הרצאתי. בפרט, אציג שלושה מחקרים: הראשון יתמקד בהבדלים בין השיחים על שני סוגי המספרים כפי שהם נחווים על ידי למעלה ממאה סטודנטים לתואר ראשון בישראל (Kontorovich, 2018b, 2018c). המחקר השני יעסוק בתועלת שמתמטיקאים מפיקים מההבדלים בין השיחים המתמטיים כדי לקדם את המטרות הדידקטיות שלהם בקורסים שהם מלמדים (Kontorovich, 2016). המחקר האחרון הוא ניסוי מחשבתי על עיצוב סביבת למידה שנועדה לצמצם את הקשיים האופייניים של הלומדים במעבר בין המספרים (Kontorovich, Zazkis, Mason, 2021).

רשימת מקורות

נחליאלי, ט., וטבח, מ. (2016). הקדמה: למידה והוראה בראי הגישה התקשורתית. *מחקר ועיון בחינוך המתמטי*, *4*, 13-21.

Gueudet, G., Bosch, M., diSessa, A. A., Kwon, O. N., Verschaffel, L. (2016). *Transitions in mathematics education*. Springer Nature.

Kontorovich, I. (2016). √9=? The answer depends on your lecturer. *Research in Mathematics Education*, *18*(3), 284–299.

Kontorovich, I. (2018a). Why Johnny struggles when familiar concepts are taken to a new mathematical domain: Towards a polysemous approach. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(1), 5–20.

Kontorovich, I. (2018b). Unacceptable discrepancy: The case of the root concept. *For the Learning of Mathematics*, *38*(1), 17–19.

Kontorovich, I. (2018c). Undergraduates images of the root concept in R and in C. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 184–193.

Kontorovich, I., Zazkis, R., Mason, J. (2021). From one kind of numbers to another: The metaphors of expansion and transition. *For the Learning of Mathematics*, *41*(1), 47–49.

Sfard, A. (2008). Thinking as Communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. Cambridge: Cambridge University Press.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning… In K. Leatham (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57–93). New York, NY: Springer.

Wu, H. (2011). The mis-education of mathematics teachers. *Notices of the AMS*, *58*(3), 372-384.

דיווחי מחקר

שיקולים המנחים פרחי הוראה במתמטיקה בחיבור בעיות בקומבינטוריקה

אילנה וייסמן[1,2], **מירלה וידר**[1]

[1]מכללת שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך, [2]אורט בראודה – המכללה האקדמית להנדסה

מבוא

לחיבור בעיות השפעה מכרעת על הוראת ולמידת המתמטיקה (Crespo, 2003). למרות היתרונות המוכחים בקידום הידע המתמטי, הן של התלמידים והן של המורים, חיבור בעיות מיושם לעתים רחוקות בכיתות (Nicol & Crespo, 2006). יתר על כן, גם תכניות להכשרת מורים למתמטיקה לא שמות דגש מספיק על חיבור בעיות מתמטיות (MPP – Mathematical Problem Posing), ובכך מטמיעות תרבות הוראת מתמטיקה המתמקדת בעיקר **בפתרון בעיות** מתמטיות. על מנת לחולל שינוי בהתייחסות לחיבור בעיות, יש להציג את הנושא כבר בשלבים הראשונים של הכשרת המורים, תוך הבנה מעמיקה של השיקולים המוטיבציוניים והרגשיים לצד השיקולים הקוגניטיביים העומדים בבסיס חיבור בעיות במתמטיקה (Cai & Hwang, 2020). מחקר זה מתייחס לקשר בין ידע תחום התוכן והשיקולים שפרחי הוראה במתמטיקה מפעילים כאשר הם מציעים בעיות לשיעור חזרה עבור עמיתיהם בסוף קורס קומבינטוריקה.

קומבינטוריקה נבחרה להוות את ההקשר המחקרי משום שלימוד קומבינטוריקה מפתח יכולות פתרון בעיות, ומטפח חשיבה מתמטית עמוקה בכל הרמות (Lockwood, Wasserman & Tillema, 2020). עם זאת קומבינטוריקה אינה קלה ללמידה, ולכן העיסוק בה יכול לעורר תגובות רגשיות ומוטיבציוניות רבות (Eizenberg & Zaslavsky, 2004).

רקע תיאורטי

חוקרים חזרו והצביעו על היתרונות של שילוב MPP בפרקטיקת המורים למתמטיקה. MPP עשוי לקדם בתלמידים יכולת לפתור בעיות, לשפר ידע מתמטי, לפתח חשיבה יצירתית, להגביר את הסקרנות והמוטיבציה בלמידת המתמטיקה (Ellerton, 2015). גם מורים יוצאים מורווחים מיישום MPP בכיתותיהם בכך שהם מקדמים את הידע המתמטי והפדגוגי שלהם עצמם ובכך משפרים את מסוגלותם העצמית בהוראת המתמטיקה (Nicol & Crespo, 2006).

על אף תמימות הדעים בנוגע ליתרונות הרבים של חיבור בעיות, החוקרים מתייחסים ל-MPP מנקודות מבט שונות (Ellerton, 2015). Silver (1994) הגדיר את MPP כתהליך קוגניטיבי הכולל בתוכו בניית בעיות חדשות או התאמה וניסוח מחדש של בעיות קיימות. התבוננות במורים למתמטיקה מצביעה על הפער הקיים בין הגדרות אקדמיות קיימות של MPP לבין מה שהמורים מחשיבים בפועל כ-MPP. המורים שמים דגש על שיקולים מעשיים ב-MPP המשרתים את צרכיהם המתמטיים והפדגוגיים (Klinshtern et al., 2015).

יתר על כן, מחקרים קודמים הקשורים ל- MPP חשפו את נטייתם של פרחי הוראה להנמיך דרישות קוגניטיביות של הבעיות, לנסח בעיות טריוויאליות, ולהציע בעיות פשוטות מספרי הלימוד (Nicol & Crespo, 2006). מתוך הנחה כי חקר MPP בקרב פרחי הוראה יהיה מובן יותר אם נאמץ את נקודת המבט שלהם על חיבור בעיות, אנו מאמצים במחקר זה נקודת מבט הרואה בעיות ראויות כבעיות התומכות במטרות הפדגוגיות של פרחי ההוראה. מתוך כך, אנו כוללים תחת מונח MPP בעיות שמוצעות לפעילות בכיתה על ידי היצמדות לבעיות הקיימות, התאמה של בעיות קיימות, ויצירת בעיות חדשות (Nicol & Crespo, 2006).

מתוך הנחת יסוד זו, לפיה פרחי הוראה במתמטיקה בוחרים להשתמש בחומר לימודי באחת משלוש הדרכים הללו, רצינו לחשוף את המנגנון המוטיבציוני / הרגשי שמנחה אותם בבחירתם. עשינו שימוש במושג "שיקולי התאמה – considerations of aptness" שהציע Kontorovich (2016) על מנת להתחקות אחר שיקולי ההתאמה המעורבים במשימות MPP אצל פרחי הוראה. על פי קונטורוביץ', שיקולי התאמה ב-MPP קשורים קשר הדוק להיבטים רגשיים המלווים הוראה ולמידה במתמטיקה.

Kontorovich (2016) הבחין בין כמה סוגים של שיקולי התאמה שעומדים בבסיס החלטות של מחברי בעיות במהלך MPP. רצינו לחדד את הבחנתו של Kontorovich (2016) ולהתייחס לכוונות פדגוגיות שעשויות לאפיין את החלטות של פרחי הוראה במתמטיקה בזמן חיבור בעיות לכיתה.

התייחסות לכוונות פדגוגיות של פרחי הוראה למתמטיקה בזמן MPP בכיתה נעשתה על ידי הבחנה בין שני סוגי שיקולי התאמה המנחים את פרחי ההוראה: (1) שיקולים הממוקדים בתלמיד (2) שיקולים הממוקדים במורה. במונח שיקולי התאמה הממוקדים במורה, אנו מתייחסים לשיקולים המתמקדים בהעדפותיו, מניעיו, ורגשותיו האישיים של מחבר הבעיות. במונח שיקולי התאמה הממוקדים בתלמידים, אנו מתייחסים לשיקולים המתמקדים בצרכים הקוגניטיביים והרגשיים של הפותרים הפוטנציאליים לבעיה שהמחבר מציע.

מטרת המחקר

מטרת המחקר הייתה לבחון את שיקולי ההתאמה שפרחי הוראה למתמטיקה מיישמים כאשר הם מחברים בעיות בקומבינטוריקה לצורך לימוד עמיתיהם במסגרת חזרה בסוף קורס קומבינטוריקה. מטרה נוספת הייתה לחקור באיזה האם וכיצד ידע החומר בקומבינטוריקה (כפי שזה משתקף מהציון הכולל בקורס) משתקף באופן החיבור של הבעיות המוצעות.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 44 פרחי הוראה במתמטיקה שלמדו קורס בסיסי בקומבינטוריקה לקראת תואר B.Ed.

לקראת סוף הקורס, פרחי ההוראה התבקשו לחבר מינימום שלוש בעיות בקומבינטוריקה לצורך שיעור חזרה עם עמיתיהם. במשימה זו הם יכלו לבחור את הנושאים ולהציע בעיות במגוון רחב של דרכים: החל מהעתקה של בעיה מספר לימוד, דרך שינוי של בעיה שנמצאה בספר לימוד ועד להמצאת בעיה חדשה. המשתתפים התבקשו לצרף פתרון מפורט לכל בעיה.

לאחר חיבור הבעיות, פרחי ההוראה ענו על שאלון מקוון (בסולם ליקרט 1-4) אודות שיקולי התאמה ורגשות הנלווים לבחירת כל בעיה. בשאלון הבחנו בין שלושה שיקולי התאמה הממוקדים במורה לבין

ארבעה שיקולי התאמה הממוקדים בתלמיד (איור 1). פרחי ההוראה יכלו לסמן מספר שיקולי התאמה ולהציע שיקולים נוספים, מבלי להיות מודעים לקטגוריות המיקוד במורה או בלומד, העומדות מאחורי בניית השאלון. לאחר מילוי השאלון פרחי ההוראה התראיינו לבירור יותר מעמיק של תשובותיהם בשאלון המקוון.

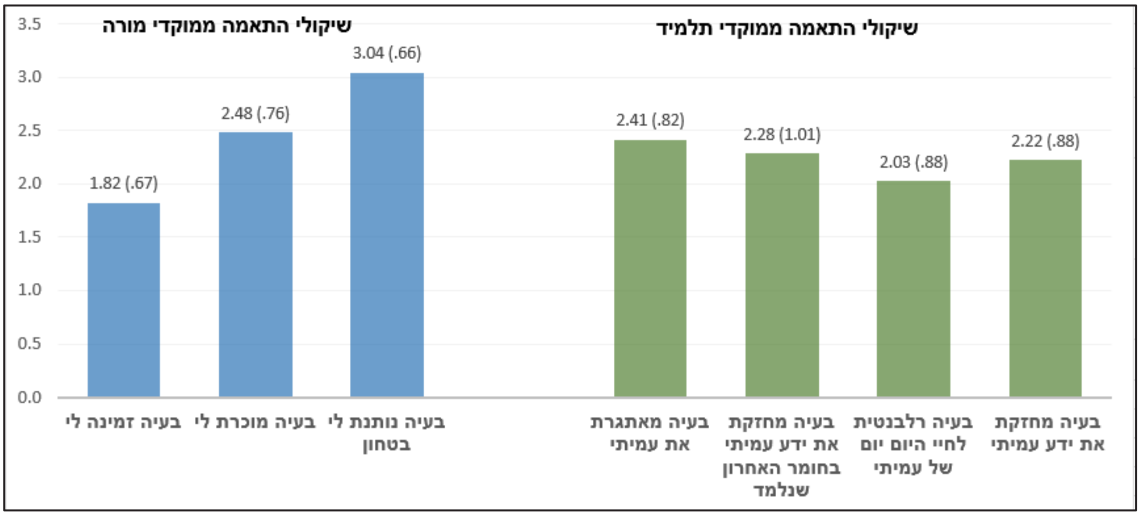
שיטת המחקר שילבה בין גישה איכותנית לכמותנית (mixed method). נתונים איכותניים, העולים מהשאלונים המקוונים ומהראיונות החצי מובנים, נותחו במקביל לניתוחים קורלציוניים והשוואתיים שנערכו לנתונים הכמותיים. הציון הסופי של הקורס (שכלל ציוני מטלות וציון בחינה) היווה את אחד השתנים הכמותיים.

ממצאים עיקריים

באיור 1 מתוארת סטטיסטיקה תיאורית (ממוצע וסטית התקן) עבור כל אחד משיקולי התאמה על פי קטגוריות המיקוד במורה או בתלמיד. מתוך איור 1 ניתן לראות כי השיקול "חיפשתי בעיה שנותנת לי בטחון" היה רווח ביותר בקרב כלל הנבדקים. שיקול זה משויך לשיקולי ההתאמה ממוקדי המורה.

איור 1

ממוצע וסטית תקן עבור שיקולי התאמה של פרחי הוראה



1. נמצאה קורלציה מובהקת (r =.427, p <.01) בין פרופורצית הבעיות אשר נבנו באופן עצמאי (M = .63, SD = .41) לבין ציון הקורס הסופי (M = 86.70, SD = 10.64). ממצא זה מראה שידע בקומבינטוריקה המשתקף על ידי ציון בקורס בא לידי ביטוי בנטייה משמעותית לבנות יותר בעיות באופן עצמאי. בנוסף מצאנו, קורלציה מובהקת שלילית בין ציון סופי בקורס לבין שיקול התאמה להציע בעיות זמינות (r = -.361, p <.05). כלומר, פרחי ההוראה במתמטיקה נטו להציע יותר בעיות ממקורות זמינים ככל שידע שלהם בקומבינטוריקה היה נמוך יותר.

2. נמצא כי הפרופורציות של בעיות שנבנו באופן עצמאי היו בקורלציה חיובית עם שיקול התאמה להציע בעיות מאתגרות (r = .415, p <.01) ועם שיקול התאמה להציע בעיות בהקשרים חדשים (r = .396, p <. 01). ממצאים אלה גם מצביעים חלקית על כך שחיפוש אחר בעיות מאתגרות ואותנטיות מחייב המצאת בעיות חדשות.

3. לא נמצא הבדל מובהק בין ממוצעים של שיקולי התאמה ממוקדי תלמיד. יחד עם זאת מצאנו הבדל בין ממוצעים של שיקולי התאמה ממוקדי מורה ($F(2,86) = 64.662, p < .001$). פרחי ההוראה נטו באופן מובהק להציע בעיות שהם ידעו לפתור בבטחה בהשוואה לשיקולי התאמה אחרים. למשל, רחל הצהירה במפורש שהיא בחרה בבעיות כדי "להרגיש במקום בטוח". שרה ניסחה את הנטייה הזו: "בחרתי בשאלה מכיוון שזכרתי היטב את פתרונה. למרבה הצער, עדיין קשה לי מאוד לפתור בעיות קומבינטוריות".

4. באופן מפתיע, מצאנו שבקבוצת פרחי ההוראה שממוצע ציוניהם בקורס נמוך יותר מהממוצע הכללי בקורס, הממוצע הכללי של שיקולי התאמה ממוקדי תלמיד היה באופן מובהק נמוך יותר בהשוואה לממוצע הכללי של שיקולי התאמה ממוקדי מורה, ($F(1,15) = 10.351, p < .01$). יחד עם זאת, פרחי הוראה עם ציונים גבוהים מהממוצע הראו העדפה דומה לשיקולי התאמה ממוקדי מורה ותלמיד.

5. מהראיונות החצי מובנים עלה שיקול התאמה נוסף הממוקד מורה. שיקול התאמה זה מתמקד ברצון לסיפוק עצמי באמצעות למידה מספקת ובעלת משמעות. למשל, חנה אמרה "הצעתי את הבעיה כי רציתי לאתגר את עצמי".

דיון

הממצאים במחקר זה מצביעים על מתאם חיובי מובהק בין בניית בעיות לבין ההישגים בקומבינטוריקה. תוצאות אלו עולות בקנה אחד עם ממצאים ממחקרים אחרים המרמזים כי למעורבות ב-MPP יש פוטנציאל לשפר את הידע התוכן המתמטי (Cai & Hwang, 2020) וכנראה גם להיפך. יתר על כן, הקורלציה השלילית בין הציון בקורס, המשקף ידע בתחום התוכן, לבין שיקול ההתאמה "להציע בעיות זמינות" נותן נקודת מבט נוספת לנטייה של מורים לדבוק בספרי לימוד או מקורות כתובים אחרים לצרכי הוראה שלהם, המצוינת בספרות המחקרית (Nicol & Crespo, 2006).

הממצאים מראים כי אימוץ חלק משיקולי ההתאמה הממוקדים בתלמיד קשור באופן חיובי לשיעור בנייה גבוה יותר של בעיות. בנית בעיות ממוקדות בתלמיד מהווה אתגר נוסף בהשוואה לבחירת בעיות מספרי לימוד. בנוסף, פרחי הוראה שקיבלו ציון נמוך מהממוצע בקורס נטו באופן מובהק לשיקולים מבוססי מורה. אפשר להסביר זאת על ידי מסוגלות עצמית נמוכה של פרחי ההוראה שקיבלו ציון נמוך מהממוצע (Hagen, Gutkin, Wilson, & Oats, 1998).

הצורך המורגש בביטחון מתמטי שהנחה את פרחי ההוראה בבעיות שהציגו בכיתה הוא מובן, כי קשה להרגיש רמה גבוהה של בטחון מתמטי בקומבינטוריקה (Goldin, 2018). זה יכול גם לספק הסבר נוסף לכך שפרחי הוראה נטו להציע בעיות זמינות ומוכרות.

אנו מציעים כי השפעה על שיקולי ההתאמה שפרחי הוראה מיישמים במהלך MPP עשויה להוות את המפתח לשיפור תחושת המסוגלות העצמית, להביא לחוויות רגשיות חיוביות יותר, וכתוצאה מכך, להקל על שילוב MPP בתוכניות ההוראה העתידיות של פרחי הוראה. פרחי הוראה שיהיו מחוברים יותר ל- MPP עשויים להפוך בהמשך לסוכני שינוי בבתי הספר.

רשימת מקורות

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research, 102*, 101391.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 243-270.

Eizenberg, M. M., Zaslavsky, O. (2004). Students' Verification Strategies for Combinatorial Problems. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(1), 15-36.

Ellerton, N. F. (2015). Problem posing as an integral component of the mathematics curriculum: A study with prospective and practicing middle-school teachers. *In Mathematical Problem Posing*, 513-543. Springer, New York, NY.

Goldin, G. A. (2018). Discrete mathematics and the affective dimension of mathematical learning and engagement. *In Teaching and Learning Discrete Mathematics Worldwide: Curriculum and Research*, 53-65. Springer, Cham.

Hagen, K. M., Gutkin, T. B., Wilson, C. P., & Oats, R. G. (1998). Using vicarious experience and verbal persuasion to enhance self-efficacy in pre-service teachers:" Priming the pump" for consultation. *School Psychology Quarterly*, *13*(2), 169-178.

Klinshtern, M., Koichu, B., & Berman, A. (2015). What do high school mathematics teachers mean by saying "I pose my own problems?", In F.M. Singer, N.F. Ellerton & J. Cai (Eds.). *Mathematical Problem Posing From research to effective practice*, 449-467. New York, NY: Springer.

Kontorovich, I. (2016). Considerations of aptness in mathematical problem posing: students, teachers and expert working on billiard task. *Far East Journal of Mathematical Education*, *16*(3), 243-260.

Lockwood, E., Wasserman, N. H., & Tillema, E. S. (2020). A case for combinatorics: A research commentary. *The Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100783.

Nicol, C. C., & Crespo, S. M. (2006). Learning to teach with mathematics textbooks: How preservice teachers interpret and use curriculum materials. *Educational Studies in Mathematics*, *62*(3), 331-355.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the learning of mathematics*, *14*(1), 19-28.

השימוש בקונפליקט קוגניטיבי כאמצעי להנחת רעיונות בהוכחה

מיקה גבל[1,2], **טומי דרייפוס**[2]

[1] אפקה – המכללה האקדמית להנדסה בתל אביב; [2] אוניברסיטת תל אביב

רקע תאורטי

במחקר המוצג כאן, אנו מייצגים את האופן בו מרצים בוחרים ללמד הוכחה מתמטית בכיתה באמצעות מושג הנקרא 'זרימה של הוכחה' שמגלם בחובו היבטים מתמטיים, דידקטיים וקונטקסטואליים של הצגת הוכחות במתמטיקה (Gabel & Dreyfus, 2017, 2020). הזרימה כוללת התייחסות למבנה הלוגי ולמאפיינים לא פורמליים של ההוכחה והיא תוצאה של האופן בו בחר מרצה להציג הוכחה בכיתה, בחירה המושפעת גם משיקולים קונטקסטואליים (למשל סילבוס או ידע קודם של התלמידים).

אנו מתמקדים במאפיינים רטוריים של הזרימה, אותם אנו מנתחים במסגרת תורת ארגומנטציה בשם "הרטוריקה החדשה" (Perelman & Olbrechts-Tyteca, 1969). הרטוריקה החדשה, להלן PNR (Perelman’s New Rhetoric), מתארת את המנגנונים המשמשים דובר (speaker) להגברת ההסכמה (adherence) ורמת השכנוע של קהל שומעים לטענות שמציג הדובר. התיאוריה מדגישה את חשיבות השימוש באמצעים רטוריים המלווים את המבנה הפורמלי של הטיעון (ולעולם כפופים לו). PNR מייחסת חשיבות מרכזית לקהל ומתייחסת להנחות המוצא שדרושות לבסיס הסכמה משותף בין הדובר וקהלו, להיקף וארגון הטיעונים, לדרכי הנכחה של אלמנטים בתזה שמציג הדובר ולסכמות הטיעון בהן נעשה שימוש. לפי PNR הדובר חייב להתאים את הטיעון לקהל ולפיכך להיות מבוסס על הנחות מוצא (premises) מוסכמות. המושג 'הנכחה' מבטא את האופנים בהם ממקד הדובר את תשומת-לב הקהל באלמנטים נבחרים בארגומנטציה על ידי שימוש במגוון טכניקות רטוריות, כגון: חזרה על רעיון, אנלוגיות ומטאפורות. בעזרת ניתוח המאפיינים הרטוריים של זרימת ההוכחה אנו מראים איך ניתן להשתמש בתכנון מחושב של הזרימה ככלי פדגוגי שמשפר את הוראת ההוכחה.

גם הגישה הקונסטרוקטיביסטית ללמידה מתייחסת לידע הקודם איתו מגיעים התלמידים לכיתה. על פי גישה זו, תהליך הבניית ידע חדש אצל תלמידים הינו תהליך אקטיבי הכרוך בשינוי של מושגים ורעיונות. אחת מהדרכים לגרום לשינוי משמעותי היא יצירת קונפליקט קוגניטיבי, שנגרם כאשר מציגים לתלמידים מידע חדש שסותר את הידע הקודם ויוצר תחושת בלבול, מבוכה וספק. חוקרים טוענים כי לפתרון הקונפליקט, המצריך תהליכים קוגניטיביים מורכבים, יש השפעה חיובית על הלמידה, כל עוד המורה יוצר את הקונפליקט מתוך מודעות לידע הקודם ומנחה את התלמידים תוך כדי דיון משותף עד לפתרונו (Limon, 2001). המושג 'קונפליקט קוגניטיבי' מתקשר לסכמת טיעון ב-PNR הנקראת 'דיסוציאציה' (dissociation), בה נוצר צורך לפתור אי התאמה בין מה שרק נדמה כאמיתי (למשל, בגלל אנלוגיה שגויה למצב מוכר) ובין מה שאכן נכון. כדי לפתור את אי ההתאמה יש צורך בקריטריון סטנדרטי ומובהק לקביעת האמת. בתחום המתמטיקה, קריטריון כזה הוא ההוכחה הפורמלית.

שאלת המחקר

המחקר עוסק בכללותו באפיון וניתוח זרימה של הוכחה, בפרט המאפיינים הרטוריים של הזרימה שתוארו לעיל, במסגרת התיאורטית של PNR. בעבר התעמקנו באופן בו ניתן להשפיע באמצעות זרימה של הוכחה על הנכחה של אלמנטים שונים בהוכחה (Gabel & Dreyfus, 2017) ועל יצירת בסיס הסכמה משותף (Gabel & Dreyfus, 2020).

במאמר זה, אנו מציגים חקר של אפיזודה משיעור בתורת הקבוצות, ונתאר כיצד השתמשה המרצה באופן מושכל בקונפליקט קוגניטיבי כאמצעי רטורי כדי (א) להנכיח אלמנטים מתמטיים ומטה מתמטיים של ההוכחה ואף את הצורך בהוכחה; (ב) לקיים תקשורת אפקטיבית ולהגביר את מעורבות הסטודנטים בכיתה.

שיטת המחקר

המחקר נערך במסגרת קורס סמסטריאלי בתורת הקבוצות, שהועבר על ידי מרצה מנוסה לפרחי הוראה בשנת לימודיהם הראשונה. במהלך הסמסטר, נצפו והוקלטו שלושה שיעורים נבחרים; אחריהם התקיימו ראיונות עם המרצה ואחדים מהסטודנטים וחולקו שאלונים לסטודנטים. הראיונות שנערכו עם המרצה נותחו, והתקבלו שיקולים של המרצה להוראת הוכחות (שיקולים כלליים ושיקולים הנוגעים להוכחה הספציפית שנלמדה בכל שיעור). השיעורים תומללו והמאפיינים הרטוריים של הזרימה של ההוכחות שנלמדו נותחו בעזרת מתודולוגיה המבוססת על שיטות מחקר איכותניות של קידוד טקסט, ועל התאמת מושגי יסוד ב-PNR לחקר הוראת הוכחות במתמטיקה (Gabel & Dreyfus, 2017).

המאמר הנוכחי עוסק באפיזודה מתוך השיעור בהם נלמדו חוקי דה-מורגן לקבוצות, בה הוצגו והוכחו חוקי הפילוג לקבוצות:

(1) פילוג של איחוד מעל חיתוך: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(2) פילוג של חיתוך מעל איחוד: $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

ממצאים

להלן שיקולי המרצה להוראת הוכחות באופן כללי, הרלבנטיים לאפיזודה המוצגת במאמר, שהתקבלו מניתוח הראיונות: (1) חשוב לחשוף את הסטודנטים לסוגים שונים של הוכחות; (2) חשוב שהסטודנטים יבנו את ההבדל בין הפרכת טענה בעזרת דוגמא נגדית ובין הוכחה שלמה של טענה נכונה ; (3) השקעת יותר מאמצים בהסבר של רעיונות מתמטיים ולא בסמנטיקה; (4) הקפדה על בנייה הדרגתית של ידע הסטודנטים כדי להגדיל את מעורבותם; (5) "למשוך" את ההוכחה מהסטודנטים עצמם; (6) שימוש בדוגמא מסייע לסטודנטים לעבור מרמה קונקרטית לרמה מופשטת. אנו מתייחסים לשיקולים אלה כאל ערכים המנחים את המרצה ומשפיעים על זרימת ההוכחה.

נפנה כעת לתיאור מהלך השיעור. השיעור נפתח בחזרה על מושגים ופעולות הקשורים לקבוצות (קבוצה, קבוצה חלקית, איבר, שייכות, הכלה, חיתוך, איחוד). לאחר מכן הגדירה המרצה את המושג "קבוצה משלימה" ותרגלה אותו בעזרת דוגמאות ודיאגרמות ון (Venn diagrams). בשלב הבא ניהלה המרצה דיון על ייצוג ככלי של מצבים הדדיים בין קבוצות בעזרת דיאגרמות וביססה באופן מעמיק את הטענה שניתן להוכיח טענות על קבוצות בעזרת השימוש בדיאגרמות ון (כמו אלו המופיעות באיור

1). רק אז ניסחה המרצה את חוקי הפילוג לקבוצות, אך במקום לפנות ישירות להוכחת החוקים ניהלה דיון מקדים עם הסטודנטים.

המרצה פנתה לסטודנטים ושאלה האם הם מכירים חוק פילוג אחר, והסטודנטים ענו שהם מכירים את חוק הפילוג האריתמטי: $a\cdot(b+c)=a\cdot b+b\cdot c$. המרצה הסבירה מדוע חוק פילוג זה נקרא חוק פילוג של "כפל *מעל* החיבור" ובקשה מהסטודנטים לנסח חוק דומה ל"חיבור *מעל* כפל". לאחר מספר ניסיונות ניסחו הסטודנטים "חוק" כזה אך טענו שהוא לא נכון לכן הוסיפה המרצה סימן שאלה מעל סימן השוויון: $a+(b\cdot c)\overset{?}{=}(a+b)\cdot(b+c)$. המרצה ביקשה מהסטודנטים לנמק מדוע החוק לא מתקיים, והסטודנטים השתמשו בנימוק אלגברי (פתיחת סוגריים באגף ימין). המרצה התעקשה להמשיך את הדיון והסבירה מדוע מספיק במקרה זה לתת דוגמא מפריכה. המרצה סיכמה חלק זה של השיעור במשפט הבא:

מרצה:	...אתם לא ידעתם בכלל מה זה חוק הפילוג, או לא הבנתם למה אני מתכוונת. אז המחשתי לכם על ידי מה שאתם יודעים מקודם, חוק פילוג כולכם מכירים, ואני שואלת את אותה שאלה. פה ראינו שקיים חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור. נכון? איך את תתרגמי את זה? במקום כפל קחי איחוד ובמקום חיבור תקחי חיתוך....ואני שואלת האם קיים חוק הפילוג [של איחוד מעל חיתוך]?

כלומר, רק לאחר שהדגישה המרצה בפני הסטודנטים שקיומו של חוק פילוג של פעולה אחת מעל פעולה אחרת איננו מובן מאליו, היא ניגשה לשאלת קיום חוק הפילוג של איחוד מעל חיתוך. קיים קונסנזוס בין הסטודנטים שהחוק נכון ומאחר שבשלב זה הסטודנטים כבר מיומנים בשימוש בדיאגרמות ון, הם הציעו להשתמש בדיאגרמות ון לבדיקת נכונות החוק, וביצעו זאת כפי שמופיע באיור 1.

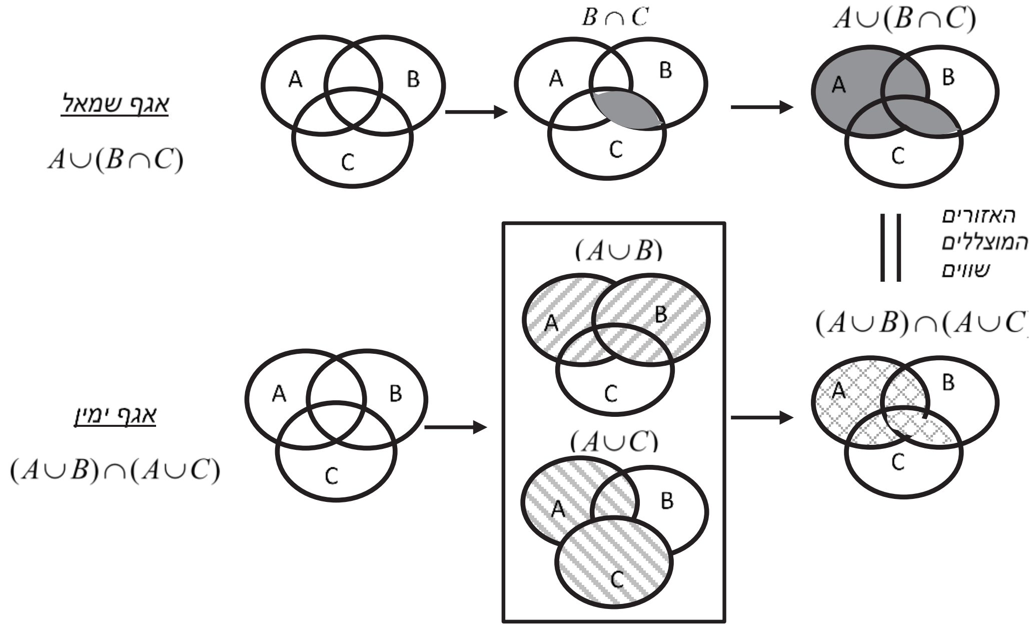
לאחר שהוכח חוק הפילוג של איחוד מעל חיתוך, המשיכה המרצה לניסוח חוק הפילוג של חיתוך מעל איחוד (למעשה, היא ביקשה מהסטודנטים שיכתיבו לה את החוק), ורשמה על הלוח $A\cap(B\cup C)\overset{?}{=}(A\cap B)\cup(A\cap C)$, בדיוק כפי שרמה את חוק הפילוג של חיבור מעל כפל. היא פנתה לסטודנטים ושאלה האם לדעתם גם חוק הפילוג השני מתקיים. הסטודנטים בקורס מורגלים בכך שהמרצה מבקשת מהם לשער האם טענה מסויימת נכונה או לא טרם הוכחתה. אבל בניגוד לקונסנזוס ששרר לגבי נכונות החוק הראשון, הפעם הדעות חלוקות ונשמעות קריאות לחוב ולשלילה:

סטודנטים:	כן/לא/נכון
מרצה:	יש מחלוקת. אחד אומר כן אחד אומר לא. נלך לפי הרוב. מי חושב שכן?... מי חושב שלא?... אז אנחנו רואים שיש מחלוקת רצינית בכיתה ואנחנו הולכים לבדוק. נראה מי צודק, אלה שאמרו שכן או אלה שאמרו שלא.

המחלוקת בכיתה היא תוצאה של האופן בו יצרה המרצה אנלוגיה מתוחכמת (ושגויה במכוון) בין חוקי הפילוג האריתמטיים וחוקי הפילוג לקבוצות. בשלב זה נוצר קונפליקט קוגניטיבי אצל חלק מהסטודנטים. המרצה השתמשה בקונפליקט שנוצר גם כדי להדגיש את הצורך בהוכחה וגם כדי לייצר מעורבות סטודנטים גבוהה בתהליך ההוכחה, משום שהסטודנטים רצו לדעת האם צדקו אם לאו. ההוכחה לא הייתה תהליך פורמלי המצדיק חוק שידוע מראש כי הוא מתקיים, אלא דרך לפתור ספק אמיתי. כך הפכה ההוכחה להיות כלי רלבנטי ומשמעותי עבור הסטודנטים.

איור 1

השימוש בדיאגרמות ון להוכחת חוק הפילוג של איחוד מעל חיתוך



מבחינה רטורית, במהלך המרצה הנכיחה (יצרה נוכחות) אלמנטים מתמטיים ומטה-מתמטיים חשובים כמו גם רבים מהשיקולים להוראת הוכחות שניסחה בראיונות (והוצגו לעיל). פתרון הקונפליקט הנכיח את ההוכחה המתמטית כאמצעי ליצור וודאות וביטחון במיוחד במצב שבו היה ספק בנכונות הטענה. בנוסף, המצב שיצרה המרצה הבהיר כי אנלוגיות "אוטומטיות" בין תחומים שונים במתמטיקה עלולות לגרום למסקנות שגויות. זהו מסר חשוב והמרצה עצמה הדגישה אותו:

מרצה: ... יש פה משהו מאד מפתיע. ראינו שבכפל וחיבור חוק הפילוג עובד רק בכיוון אחד, רק של הכפל מעל החיבור... לעומת זאת, באיחוד וחיתוך חוק הפילוג עובד לשני הכיוונים. יש גם חוק הפילוג של האיחוד מעל החיתוך וגם חוק הפילוג של החיתוך מעל האיחוד. ... אלה שאמרו לא לקחו את ההשראה שלהם מהדוגמא של הכפל והחיבור. אבל הסוף הוא שזה כן.

המרצה סיכמה את התהליך ובנוסף הדגישה שהמצב שנוצר לא היה טריוויאלי אלא 'מפתיע', ושמקור הקונפליקט היה האנלוגיה השגויה לחוקי הפילוג האריתמטיים. ההתייחסות המכבדת שלה לסטודנטים שטעו תואמת את אחד משיקולי ההוראה המרכזיים שלה: לעודד השתתפות ומעורבות של הסטודנטים. עם זאת, היא הדגישה את הצורך להיזהר מאנלוגיות ודוגמאות מכשילות.

דיון ומסקנות

האופן בו תכננה המרצה את הזרימה של ההוכחה באפיזודה שהצגנו, איפשר לה לעשות שימוש עשיר בידע הקודם של הסטודנטים לגבי חוקי הפילוג האריתמטיים כדי ליצור אנלוגיה מעוררת מחשבה שעוררה קונפליקט קוגניטיבי. תהליך פתרון הקונפליקט תוך שימוש במנגנון הרטורי של דיסוציאציה יצר רמת מעורבות גבוהה של הסטודנטים והנכיח אלמנטים מתמטיים ומטה מתמטיים חשובים כגון סוגי הוכחות רלבנטיים והצורך בהוכחה מתמטית כאמצעי ליצירת וודאות. המושג הרטורי 'הנכחה' מזכיר את המושג 'תשומת-לב' (attention) של Mason (1998). Mason זיהה חמישה סוגי 'תשומת לב' בכיתת המתמטיקה (החל מבהייה וכלה בזיהוי תכונות מופשטות וקשרים בין עצמים מתמטיים).

הוא טען ששינוי מצב 'תשומת הלב' של התלמיד הוא קריטי ללמידה ושבאחריותו של המורה ליצור תנאים שיעוררו וימקדו את 'תשומת הלב' הרצויה אצל הסטודנטים. אנו מציעים ששימוש באמצעים רטוריים להנכחת אלמנטים מרכזיים בהוכחה עשוי לעורר את 'תשומת הלב' הרצויה על פי Mason.

Dawkins and Weber (2017) טוענים שבכיתת המתמטיקה מתקיימת למעשה אינטראקציה בין תרבויות: זו של קהילת המתמטיקאים וזו של הוראת המתמטיקה. לעיתים מתקיימים פערים בין שתי התרבויות, ופערים אלה מקשים על הסטודנטים לעסוק באופן פעיל ומעורב בפעילות הוכחה מתמטית. לכן, טוענים Dawkins and Weber, חשוב מאד לבטא באופן ברור ושקוף ערכים ונורמות מתמטיות מקובלות בתחום המתמטיקה במהלך הוראת הוכחות. למעשה, גישה זו מקנה חשיבות רבה לאיכות התקשורת שיש בין המרצה והסטודנטים בכיתת המתמטיקה, שגם Carrascal (2015) רואה בה מרכיב חיוני בהוראה ולמידה של הוכחות. באפיזודה אותה הצגנו, המאפיינים הרטוריים של הדיון הכיתתי שהניעה המרצה גרמו לכך שאלמנטים שהמרצה תופשת כמרכזיים קיבלו דגש מיוחד. למעשה, כל ששת השיקולים להוראת הוכחות שהצגנו בתחילת סעיף הממצאים באו לידי ביטוי.

לסיכום, מחקרנו מציע מושג פדגוגי שימושי, זרימה של הוכחה, ודרך לנתח את המאפיינים הרטוריים של הזרימה. אנו טוענים שתכנון מוקפד של הזרימה ושל מאפייניה הרטוריים, המתייחס לשילוב של התוכן המתמטי ואופן הצגתו לסטודנטים, מקדם תקשורת פרודוקטיבית בכיתת המתמטיקה. יתרה מכך, אנו טוענים שתכנון הזרימה יכול לעורר אצל מרצים מודעות לאלמנטים מתמטיים ומטה מתמטיים שהם תופשים כמרכזיים ושברצונם להנחיל לסטודנטים, באופן אפקטיבי ומעורר עניין ומעורבות.

רשימת מקורות

Carrascal, B. (2015). Proofs, mathematical practice and argumentation. *Argumentation, 29*, 305–324.

Dawkins, P. C., & Weber, K. (2017). Values and norms of proof for mathematicians and students. *Educational Studies in Mathematics,* 95, 123–142.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2017). Affecting the flow of a proof by creating presence – a case study in Number Theory. *Educational Studies in Mathematics, 96*(2), 187-205.

Gabel, M., & Dreyfus, T. (2020). Analyzing proof teaching at the tertiary level using Perelman's new rhetoric. *For the Learning of Mathematics, 40*(2), 15-19.

Limon, M. (2001). On the cognitive conflict as an instructional strategy for conceptual change: a critical appraisal. *Learning and Instruction, 11*(4-5), 357–380.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1,* 243-267.

Perelman, C., & Olbrechts-Tyteca, L. (1969). *The new rhetoric: A treatise on argumentation* (J. Wilkinson & P. Weaver, Trans.). Notre Dame: University of Notre Dame Press.

התפתחות של משמעויות של קצב שינוי

אנטולי קורופטוב[1], דפנה אליאס[2], טומי דרייפוס[2], ליה נח-סלע[2]

[1]מכללת לוינסקי לחינוך, [2] אוניברסיטת תל אביב

משמעויות של מושגים בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי (חדו"א) בתיכון

החדו"א מהווה נושא מרכזי במתמטיקה תיכונית עבור תלמידים מוכווני מדעים. אנשי חינוך הדגישו את החשיבות של למידה שמדגישה את המשמעות של המושגים המתמטיים בכל הנושאים והתחומים, לרבות חדו"א. אף על פי כן, המחקר על המשמעויות האישיות של תלמידי תיכון למושגי היסוד של החדו"א הינו דל. מטרת הצגה זו – לדווח על ממצאים אחדים ממחקר מתמשך המוקדש לחקר המשמעויות של המושגים הבסיסיים של חדו"א אצל תלמידי תיכון מוכווני מדעים. המחקר עוסק בשתי סוגיות: ביאור משמעויות שניתן לצפות מתלמידי תיכון לפתח, וחקירה אמפירית של המשמעויות שהם אכן מפתחים למושגים אלה. ביאור המשמעויות מבוסס על ניתוח תכני מעמיק של חדו"א תיכוני; יחד עם זאת, ניתן לצפות מתלמידים לפתח משמעויות אלו רק אם המשמעויות האישיות של המורים למושגי היסוד בחדו"א מתאימות (Thompson, 2016). לפיכך, אנו חוקרים אמפירית את משמעויותיהם האישיות של מורים ופרחי הוראה למושגים היסודיים של החדו"א. בהצגה זו נתמקד ב*משמעויותיהם האישיות של מורים ופרחי הוראה למושג קצב שינוי, והאופן בו הן מבוטאות בשיח בעל הקשר חוץ-מתמטי*.

קצב שינוי: מסע לקראת משמעות – מספר שיקולים תאורטיים

הלמידה של תלמידים מושגים הקשורים לחדו"א מתפרשת על פני שנים רבות, החל בחטיבת הביניים ועד לאוניברסיטה. למידת החדו"א מתבססת על ניתוח, ניסוח ופתרון של בעיות של שינוי והצטברות (Törner et al., 2014; Bressoud et al., 2015). ראשית לומדים את המושגים משתנה, פונקציה וקצב שינוי בחטיבת הביניים, לאחר מכן את המושגים נגזרת ואינטגרל בתיכון, ובהמשך גבולות, רציפות ודיפרנציאלים בלימודי התואר הראשון.

הממצאים המחקריים חושפים כי תלמידים (גם בעלי יכולות מתמטיות גבוהות) רוכשים לעיתים רחוקות הבנה של המושגים, ובמקרה הטוב רוכשים טכניקות פורמליות לפתרון הבעיות (למשל, Artigue, 1991; Tall, 1993; Johnson, 2015a, 2015b; Schneider, 1992; Törner et al., 2014; Tsamir et al., 2006; Ubuz, 2007; Kouropatov, 2016). כדרך אפשרית ורצויה לשיפור המצב, אנשי חינוך הדגישו את החשיבות של למידה עם משמעות במתמטיקה בכלל ובחדו"א בפרט.

הסוגייה המרכזית עבור אנשי חינוך היא כיצד להפוך את הרעיונות היסודיים בחדו"א לבעלי משמעות בעבור התלמידים, כלומר גם קוהרנטיים מתמטית וגם ברי-יישום עבור מצבים שונים מחיי היום-יום (ומספר מצבים מעולם המדע), כגון מיכל המתמלא במים או מתרוקן; נפחו של נוזל בכלי כתלות בגובהו וקצב השינוי של נפח זה עם הגובה; זווית ההטיה של קורה שמופעל עליה מאמץ, מה שמצריך המשגה של מאמץ (González-Martín, & Gomes, 2017).

חוקרים נדרשו לקושי של תלמידים בפירוש הפעולות אותן הם מבצעים בשיעורי מתמטיקה וייחוס משמעויות פורות למושגים מתמטיים (למשל, Reusser, 1988). Schoenfeld (1991) התייחס ל-"גירושין המצערים של מתמטיקה פורמלית ומתמטיקה שאינה פורמלית" (p. 331). ספרים שלמים נכתבו על משמעות בחינוך מתמטי (Kilpatrick et al., 2005). חרף זאת, לאחרונה ציין Thompson (2013) כי אף שחוקרים מדברים על משמעות, הם אינם מטפלים בה, ושמחקר בחינוך מתמטי הנדרש לסוגיית המשמעות באופן רציני הוא נדיר. Thompson (2013) מדבר על "חוסר התייחסות שיטתי-תרבותי למשמעות מתמטית וקוהרנטיות" (p.57). כך למשל, בהתייחס לנגזרת, אזכור השיפוע של המשיק הינו שטחי, בעוד שהרעיון של קצב שינוי "טומן בחובו תיאום מורכב בין ההבנה של כמות, שינוי, שינוי יחסי, הצטברות ופרופורציוניות" (p. 60).

בחרנו במושג קצב שינוי כלב ההצגה כי מושג זה הוא העוגן המתמטי לרעיון הנגזרת; מושג זה הוא המפתח המתמטי לקשר בין נגזרת ואינטגרל; מושג זה נזכר ונלמד בבית הספר לאורך שנים רבות.

במסגרת ההמשגה של המחקר הזה אנו מתייחסים למושג קצב שינוי בצורה הבאה: בהינתן גודל ראשון אשר משתנה בהתאם לשינוי גודל שני, קצב שינוי של גודל ראשון בהתאם לגודל שני הוא מנת חילוק הפרש הערכים של גודל ראשון להפרש הערכים המתאימים של גודל שני.

נדגיש כי משמעויות שזוהו באופן תיאורטי על ידי החוקרים עשויות להיות שונות מהמשמעויות שנוצרו אצל התלמידים בפועל; לדוגמה, Yoon (2019) הראתה מפורשות כי בעוד שלמורה הייתה משמעות אחת בעבור שיפוע/נגזרת/קצב שינוי בנקודה, תלמידיה החזיקו במשמעויות אחרות.

מהאמור לעיל בחרנו בשתי נקודות עיקריות כרקע: ניתן לצפות כי תלמידים יפתחו משמעויות הולמות למושגים היסודיים של חדו"א רק בתנאי שהמשמעויות האישיות של מוריהם הולמות, ו-"בעל משמעות" פירושו ישים עבור מצבים שונים מחיי היום-יום (ומספר מצבים מעולם המדע).

מתודולוגיה

במחקר זה השתתפו מורות ומורים למתמטיקה שהשתתפו בלימודים לקראת תואר שני בהוראת מתמטיקה במסגרת אוניברסיטאית.

על מנת לאסוף מידע אמפירי לגבי המשמעויות האישיות של קצב שינוי שיש למורות ולמורים אנו נעזרים בשתי שיטות: פריטים דיאגנוסטיים ופריטים דיסקורסיביים (חלק מהפריטים יוצגו בכנס). פריט דיאגנוסטי מכיל טענה מתמטית (עם או ללא הקשר חוץ-מתמטי) שמשמעויות שונות יכולות להיקשר בה. פריט דיסקורסיבי נותן למורות ולמורים הזדמנות להכריע האם זה הגיוני לדבר על קצב שינוי בשלל מצבים חוץ-מתמטיים.

בהצגה זו אנו מתמקדים בפריטים דיסקורסיביים, במטרה לשפוך אור על שאלת המחקר: *לאילו אלמנטים של ידע (מתמטי, כללי) מתייחסים הנבדקים כאשר הם קובעים האם המושג (קצב שינוי) רלבנטי במצבים חוץ-מתמטיים?*

פריט דיסקורסיבי מייצג סיטואציה בקונטקסט חוץ-מתמטי ומבקש להתייחס לקצב שינוי. בדוגמה א ישנה אפשרות לדבר על גדלים שונים (זמן, מהירות, מרחק וכו'). למשל אם מתייחסים למרחק שמשתנה בהתאם לזמן, אז קצב השינוי של מרחק בהתאם לזמן הינו מהירות המכונית. בדוגמה ב הגדלים צוינו במפורש (מרחק, גובה מתחת לפני ים התיכון).

דוגמה א לפריט:

דובי אמר: אני חושב על מכונית שנעה בכביש.
האם הגיוני לדבר על קצב שינוי בסיטואציה של דובי? כן / לא
אם כן, על איזה קצב שינוי הגיוני לדבר?
אם לא, למה לא?

דוגמה ב לפריט:

גאולה אמרה: סירה שטה על הכינרת. אני חושבת על המרחק אותו הסירה שטה ועל גובה הסירה מתחת לפני הים התיכון.
האם הגיוני לדבר על קצב שינוי בסיטואציה של גאולה? כן / לא
אם כן, על איזה קצב שינוי הגיוני לדבר?
אם לא, למה לא?

כל המידע נאסף במהלך ראיונות חצי-מובנים שנערכו פנים אל פנים. הראיונות נמשכו בערך 60 דקות כל אחד ונותחו באופן איכותני במטרה לאסוף עדויות אמפיריות ליכולת הנבדקים לזהות גדלים מעורבים (סוג הגדלים, מספר הגדלים), לקבוע האם הגדלים המעורבים משתנים או לא, והאם הגדלים המעורבים משתנים ביחד או לא (קו-ואריאציה), להתייחס לקצב שינוי רלוונטי.

ממצאים

כפי שצוין לעיל, לנבדקים הוצגו מצבים חוץ-מתמטיים שונים הכוללים גדלים שונים: אורך הדרך, גובה על פני הים, מידות דף נייר, ציוני מבחן, היקף המשכורת וכו'.

מניתוח הנתונים עולה כי כל הנבדקים מזהים גדלים רלבנטיים במצבים שהוצגו בפניהם, ומסוגלים להתייחס ולדבר על הרלבנטיות של המושג קצב שינוי במצבים אלה. בהתייחסויות שלהם ניתן לזהות מספר מאפיינים.

הנבדקים דיברו על המושג "שינוי" כתנאי (במובן מסוים הכרחי) לרלבנטיות של קצב שינוי למצבים השונים – *"אין פה שום דבר שמשתנה, אפשר לדבר על יחס ולא על קצב שינוי"*, *"אין כאן קצב שינוי כי גדלים לא משתנים"*, *"גודל אחד הוא קבוע אין קצב שינוי"*.

במצבים שבהם בעיני הנבדקים היה "שינוי", אמירותיהם התחלקו למספר קטגוריות:

במצבים שבהם אחד מהגדלים המיוצגים בסיטואציה באופן מפורש היה זמן (כמו למשל בדוגמה א), הנבדקים קבעו שניתן לדבר על קצב שינוי, ויכלו לתאר אותו ואת יחידות המידה שלו.

בפריטים בהם זמן לא שימש כגודל (למשל, בדוגמה ב), הנבדקים נקטו באחת משתי גישות:

- ניסו להכניס "זמן" כפרמטר בתוך הקונטקסט: *"הגדלים בסיטואציה משתנים כל הזמן אבל אני לא ידעת האם אפשר לאמוד קצב שינוי"*, *"ככל שעובר זמן גודל אחד משתנה וגם גודל שני משתנה אז יש קצב שינוי כי גדלים משתנים כל הזמן"*, *"יש כאן פרמטר של זמן"*.
- נימקו את חוסר הרלבנטיות של קצב שינוי על סמך חוסר "קשר" בין הגדלים: *"אין פה קצב שינוי כי אין קשר בין שני משתנים"*, *"אין קשר בין שינוי בגודל אחד לשינוי בגודל אחר"*, *"גודל אחד לא משתנה בהתאם לגודל אחר"*, *"אין השפעה של גודל אחד לשני"*.

ממצאים אלו אפשר לסכם כדלקמן:

1. הנבדקים מייחסים את המושג "שינוי" כתנאי הכרחי למושג "קצב שינוי";
2. הנבדקים מתייחסים למושג "שינוי" כגודל המקבל ערכים שונים;
3. הנבדקים מייחסים למושג "קצב שינוי" את המושג "משתנה לאורך זמן". כאשר "זמן" אינו מעורב בסיטואציה באופן מפורש, הנבדקים הכניסו אותו בעצמם;
4. הנבדקים מייחסים למושג "קצב שינוי" את המושג "קשר של סיבה-תוצאה".

יש לאשש ממצאים אלה בעתיד; בכוונתנו להמשיך ולהרחיב את המחקר. אף על פי כן, מנקודת מבטינו, ממצאים אלה בעלי ערך רב לצורך דיון משמעותי בשאלות הדידקטיות הבאות:

- כיצד ניתן להכניס באופן הולם את הרעיון של "שינוי" לתכנית הלימודים?
- האם יש להתייחס לזמן כפרמטר מובנה של שינוי או לא?
- מה ההבדל בין המושג "שינוי" למושג "קצב שינוי"?
- נראה כי במקרה של קצב שינוי, להקשר החוץ-מתמטי יש חשיבות רבה, ואף מכרעת, על הפרשנות שנותנים הנבדקים למושג מתמטי זה. מה המשמעות הדידקטית של סוגיה זו? האם יש ראשית לחקור מצבים חוץ-מתמטיים או ראשית ללמוד את המתמטיקה הפורמלית?

מחקר זה נתמך על ידי הקרן הישראלית למדע (מענק 1743/19).

רשימת מקורות

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 167-198). Boston, MA: Kluwer.

Bressoud, D., Mesa, V., & Rasmussen, C. (Eds.) (2015). *Insights and recommendations from the MAA national study of college calculus.* New York: MAA PRESS.

González-Martín, A. S., & Gomes, G. H. (2017). How are Calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. In T. Dooley & G. Gueudet (Eds.), *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10)* (pp. 2073-2080). Dublin, Ireland: DCU Institute of Education and ERME.

Johnson, H. L. (2015a). Secondary students' quantification of ratio and rate: A framework for reasoning about change in covarying quantities. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 64-90.

Johnson, H. L. (2015b). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 89-110.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O., & Valero, P. (Eds.) (2005). *Meaning in mathematics education*. New York, NY: Springer, Mathematics Education Library, Vol. 37.

Kouropatov, A. (2016). *The Integral Concept in High School: Constructing Knowledge about Accumulation*. Unpublished doctoral dissertation. Tel Aviv University, Israel. (In Hebrew)

Reusser, K. (1988). Problem solving beyond the logic of things: contextual effects on understanding and solving word problems. *Instructional Science, 17*, 309-338.

Schneider, M. (1992). On learning the rate of instantaneous change. *Educational Studies in Mathematics, 23*(4), 317-350.

Schoenfeld, A. H. (1991). On mathematics as sense-making: an informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. In J. F. Voss, D. N. Perkins, & J. W. Segal (Eds.), *Informal Reasoning and Education* (pp. 311-343). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Tall, D. (1993). Students' difficulties in Calculus. In C. Gaulin, B. R. Hodgson, D. H. Wheeler, & J. Egsgard (Eds.), *Proceeding of Working Group 3 on Students' Difficulties in Calculus of 7th International Congress on Mathematical Education* (pp. 13-28). Quebec, Canada.

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning…. In Leatham, K. (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). New York, NY: Springer.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In English, L., & Kirshner, D. (Eds.), *Third Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-461). London: Taylor and Francis.

Törner, G., Potari, D., & Zachariades, T. (2014). Calculus in European classrooms: curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education, 46*(4), 549-560.

Tsamir, P., Rasslan, S., & Dreyfus, T. (2006). Prospective teachers' reactions to right-or-wrong tasks: The case of derivatives of absolute value functions. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 240-251.

Ubuz, B. (2007). Interpreting a graph and constructing its derivative graph: stability and change in students' conceptions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(5), 609-637.

Yoon, H. (2019). A calculus teacher's image of student thinking. In A. Weinberg, D. Moore-Russo, H. Soto, & M. Wawro (Eds.), *Proceedings of the 22nd Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp.714-721). Oklahoma City, OK.

להרגיש את השרטוט

דינה רוזנסקי, אליק פלטניק

האוניברסיטה העברית בירושלים

מבוא ורקע תיאורטי

בקרב חוקרים בחינוך מתמטי קיימת מודעות לגבי המורכבות של גיאומטריה במרחב עבור תלמידים (למשל Widder, Berman, & Koichu, 2019). תחום מתמטי זה דורש שליטה בחמישה סוגים של חשיבה מתמטית: בנייה מרחבית, מדידה, ייצוג של אובייקטים בתלת מימד, נימוק של מאפיינים מתמטיים ויכולת ראייה מרחבית (Pittalis & Christou, 2010). סביבות גיאומטריות דינמיות מאפשרות ליצור סיטואציות דידקטיות ושיטות חקר חדשות, אך מוגבלות לייצוג דו ממדי (מסך) של אובייקטים תלת מימדיים (Dimmel & Bock, 2017). דבר זה מעורר בעיות תפישה ושימושיות. על כן ישנו צורך בפיתוח שיטות הוראה הנשענות על ייצוג תלת מימדי של המרחב, אשר יעודדו את התפתחותם של חמשת סוגי החשיבה שהוזכרו לעיל. בכך, אלו יסייעו להתגבר על שלל הקשיים הכרוכים בסוגי חשיבה אלו.

העט התלת מימדי הוא חידוש טכנולוגי וטרם נחקר בתחום הוראת הגיאומטריה. העט מאפשר ציור חופשי עם פלסטיק חם ואינו דורש תכנות או תוכנת מחשב. נג וסינקלר (Ng & Sinclair, 2018) בדקו בקרב תלמידי כיתות י"ב כיצד ניתן להשתמש בעט התלת מימדי בשיעור חדו"א בשרטוטים של גרפים דו מימדיים. במחקרם דווחו מספר יתרונות של השימוש במכשיר זה בהוראה. במחקר הנוכחי אנו מבצעים בדיקה של פוטנציאל השימוש בעט תלת מימדי לצורך מעבר מייצוגים דו מימדיים לייצוגים תלת מימדיים. ברישומי תלת מימד ניתן לבצע אינטראקציה מוחשית עם האובייקט הגיאומטרי (תנועה, מחוות, עיגון בעולם הפיזי) אשר אינה מתאפשרת במדיום הדו מימדי (נייר/מסך). על כן, אנו משערים כי רישום תלת-ממדי עשוי להתגלות כיעיל לצורך המחשת מושגים ופרוצדורות בגיאומטריה מרחבית, אשר הצגתם במרחב דו מימדי נוטה להטעות את התלמידים.

המסגרת התיאורטית בה אנחנו משתמשים על מנת לבחון למידה באמצעות עט תלת-מימדי הינה למידה מעוגנת גוף (embodied learning), שמשמעותה היא הבניית פעילות למידה בצורה הדורשת שימוש בתנועה ובגוף עצמו (Kim, Roth, & Thom, 2011). אנו חוקרים כיצד מושפעים תהליכי החשיבה והלמידה של התלמיד מהאינטראקציה של גופו עם העולם הפיזי, ובפרט, שרטוט בעט תלת מימד במהלך פתרון בעיה בנושא גיאומטריה במרחב. בנוסף, המחקר עוסק בעיצוב מעוגן גוף (embodied design) של פעילויות מתמטיות (Abrahamson & Lindgren, 2014): מה הם מאפייני התנועה, מהו השוני במחוות ובדיבור המלוות את פתרון הבעיה במרחב הפיזי? באופן אופרטיבי, אנחנו שואלים אילו מאפיינים יש למניפולציה קונקרטית ומובנית על אובייקטים גיאומטריים המבוצעת על ידי תלמידים עם עט רישום תלת־ממדי? כיצד מאפיינים אלו באים לידי ביטוי בהתמודדות תלמידים עם שאלות בגיאומטריה מרחבית?

בהצעה זו אנו מציגים מחקר השוואתי של שני מקרים אשר מדגים אופני אינטראקציה שונים של התלמידים עם הקובייה (סוג סיבובים, ובניות עזר), דיוק בתשובות ונימוקים, ביטוי ליכולת מרחבית ותפיסת צורה במרחב, כשהם מתמודדים עם משימות בגיאומטריה מרחבית עם עט תלת מימדי.

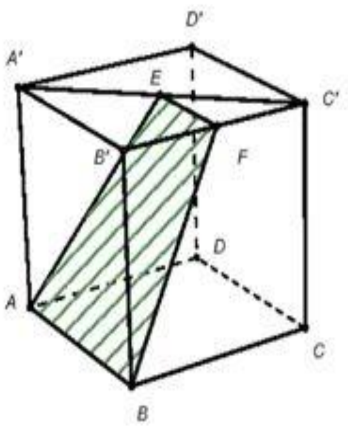
מתודולוגיה

המקרים המדווחים בהצעה זו הם חלק מתוך פרויקט מחקר מתמשך בו השתתפו עד כה שישה תלמידי תיכון בתנאי מעבדה ו־35 תלמידי כיתה י' שעשו פעילות זהה בזוגות בתנאי כיתה.

לפני שהתחילו בפעילות, התלמידים התבקשו לענות על שאלון מקוון בן שלושים שאלות, המבוסס על סיבוב מנטלי אשר בודק יכולת מרחבית. לאחר מכן, התלמידים התבקשו לצייר עם העט בצורה חופשית כדי לתרגל את השימוש בו. במהלך הפעילות התלמידים ענו על שלוש שאלות (כל שאלה בעלת 4 סעיפים לפחות). לדוגמה, ב**איור 1** מוצגת השאלה השלישית בסדרת השאלות עם הקובייה והעט תלת מימדי.

איור 1

דוגמא לשאלה (אומץ מ־Widder, Berman, & Koichu, 2019)



נתון	סיעף	שאלה	תשובה	
קוביה ABCDA'B'C'D' נקודה E באמצע של A'C'. נקודה F באמצע B'C'.	1	B' נקודה על AE.	נכון □	לא נכון □
	2	טרפז ABFE הוא שווה שוקיים. הצלעות השוות הן ____.	נכון □	לא נכון □
	3	טרפז ABFE הוא ישר זווית. הזוויות הישרות הן ____.	נכון □	לא נכון □
	4	AE הצלע הכי ארוכה במרובע ABFE.	נכון □	לא נכון □

בבקשה תדרג/י עד כמה את/ה בטוח/ה בתשובתך:

1. לא בטוח/ה בכלל 2. בטוח/ה במידה מסוימת 3. בטוח/ה ברמה סבירה 4. מאד בטוח/ה 5. בטוח/ה לגמרי

התלמידים עונים על השאלות תוך שימוש בשלד הקובייה ובעט תלת מימדי (ראו **איור 2**).

איור 2

נבדק S (מרכז) מצייר ב'אוויר', נבדקת M (ימין) מציירת כאשר צלע הקובייה נשענת על השולחן. בניית עזר (AF) של נבדקת M (שמאל).

לאחר כל שאלה שפתרו התלמידים הם נשאלו אודות מידת הביטחון שלהם בתשובתם. בתום הפעילות נערך ראיון מבוסס משימה (על משימות הקובייה), וראיון כללי אודות חווייתם של הנבדקים. כל המפגש צולם (ללא פנים) והוקלט כדי לאפשר ניתוח מלא ומפורט של הנתונים.

נקטנו בגישה של 'תיאוריה מעוגנת בשדה,' מהווה ניתוח מיקרו-גנטי של הנתונים האמפיריים (Goldin, 2000), תוך בחינה רב-מודאלית של תנועות גוף, מחוות התלמיד והתבטאותיו ושל מידת הצלחתו במשימה. הצלבנו את הנתונים מביצוע המשימה עם הראיון שבסופה, לשם קבלת תמונה שלמה של ההתרחשות מנקודת המבט של התלמיד. שיטת הקידוד הייתה קידוד חופשי, אשר במהלכו עלו תימות מרכזיות שעברו עידון והובילו לקטגוריזציה של המאפיינים השונים בחוויית הלמידה של כל נבדק לשם השוואה בין הנבדקים השונים.

ממצאים ודיון

הנתונים חושפים את מגוון הדרכים שבעזרתן הגיעו הנבדקים לפתרונות הנכונים. השוני בין הנבדקים בא לידי ביטוי במספר מאפיינים: האינטראקציה בין התלמיד לקוביה, סוג הרוטציות שבוצעו, בניות העזר שהוספו, תפיסת הצורות התלת מימדיות, וכן תיאור החוויה והרגשות שעלו במהלך הפעילות. בנוסף, זיהינו שוני ביכולת הראיה המרחבית של התלמידים אשר השפיע על המאפיינים לעיל ונמצא כבלתי תלוי במיומנויות המתמטיות שלהם. נדגים זאת בשני מקרים ספציפיים: נבדק S ונבדקת M. שניהם באותה שכבת גיל ובאותה רמה במתמטיקה (כיתה י', רמה של 5 יחידות לימוד) מבתי ספר שונים בארץ.

על מבחן רוטציה לבדיקת יכולת ראיה מרחבית נבדק S ענה נכון על 26 פריטים מתוך 30, תוצאה גבוהה ביחס לנבדקים האחרים במחקר. לעומת זאת, נבדקת M ענתה נכון על 15 מתוך 30 הפריטים, תוצאה נמוכה ביחס לנבדקים האחרים.

אינטראקציה עם קובייה

בזמן הפעילות, נבדק S רוב הזמן סובב את הקוביה בשלושה צירי סיבוב תוך שילוב תנועות מורכבות יותר, והמשיך להסתכל עליה גם בזמן קריאת השאלה. הוא שירטט עם העט התלת מימדי וענה על השאלה. נבדקת M, בעלת יכולת מרחבית נמוכה יותר, סובבה את הקובייה לרוב רק במישור השולחן. ניתן לאפיין את תנועותיה והתנהגותה ביתר הססנות וסטגנציה. נראה כי נבדקים שסובבו את הקובייה מכל הכיוונים, הגיעו להסברים לתשובותיהם בצורה מהירה ויעילה יותר לעומת אלו שלא עשו זאת (ראה הבדלים בדרך הציור ב**איור 2**).

חלק מהנבדקים הוסיפו בניית עזר עם העט לצורך פתרון הבעיה. S לא ניסה להשתמש בבניית עזר במהלך כל הפעילות, אך כן נעזר באצבעותיו כדי "לדמיין" בניות עזר אפשריות לצורך פתרון הבעיה. נבדקת M התמהמה זמן רב עד שהבינה כיצד הטרפז בנוי בתוך הקוביה והשתמשה בבניית עזר בפתרון שאלה מספר 3 (ראה **איור 2**, שמאל).

מהנתונים עולה גם חשיבות ההיבט הרגשי בהתמודדות עם שאלות מרחביות בעזרת שרטוט בעט תלת מימדי. רוב התלמידים דיווחו על חווית השרטוט בהתלהבות. בהתנסותה הראשונה עם השרטוט בעט אמרה נבדקת M: "וואי, זה אחד המגניבים." הנבדקים בעלי יכולת ראיה מרחבית נמוכה לא רצו לוותר על המשימה ובמשך דקות ארוכות ניסו להסביר את תשובתם בצורה מספקת. התמלול הבא מראה כיצד M מתקשה לתפוש את הצורה התלת מימדית, אך מנסה ארוכות.

M: אני לא בטוחה אם אני מציירת את המרובע שהם מדברים עליו...זה מכאן לכאן, נכון? זה לא כל הצורה בתלת מימד. (מסמנת עם האצבע את כל המרובע מ-A ל-'A ל-C ל-D).

מראיינת: זה ככה (מצביעה על אזור בתוך המודל של הקובייה)

M: אז אם זה היה ככה [שטוח על השולחן] זה היה אותו דבר אבל על דף... וואי זה מסובך. (מניחה ידיים שטוחות על השולחן.)

על אף הממצאים המעודדים הללו, ההתעקשות של חלק מהנבדקים ליצור שרטוט מדויק לא בהכרח הניבה הצלחה (כולל אלה עם יכולת ראיה מרחבית טובה.) היו תלמידים שרצו לשרטט בצורה מדויקת, דבר שלא תמיד אפשרי עם העט. חשוב לציין שהנבדקים לא השתמשו בעט תלת מימדי טרם השתתפותם במחקר. הדבר מעורר שאלה לגבי האפשרות להתגבר על המכשולים האלה באמצעות חשיפה לאמצעי זה בבית ספר יסודי או חטיבת ביניים.

במהלך הראיונות הנבדקים טענו שהתרגלות לשימוש בכלי תאפשר לתלמידים להבין את החומר הנלמד בצורה מעמיקה יותר, והשימוש בו לא יהווה "בזבוז זמן" בשיעור. למשל, נבדק S אמר שאם זאת הייתה אפשרות שכל תלמיד יכיר את הכלי וזה "יהיה כמו מחשבון בקלמר" הדבר יכול להיות משמעותי בחווית הלמידה בבית הספר.

אנו ממשיכים להגדיל את המאגר שלנו הן מבחינת איסוף הנתונים והן מבחינת העמקת הניתוח של הנבדקים. חווית הלמידה של הנבדקים הינה חוויה מעוגנת גוף מעצם עיצוב הפעילות. בהמשך המחקר אנו רוצים לחקור כיצד חוויה מעוגנת גוף משפיעה על חווית הלמידה, תוך התמקדות בבניות עזר של התלמידים וההשפעה של רגשותיהם על הפעילות.

רשימת מקורות

Abrahamson, D., & Lindgren, R. (2014). Embodiment and embodied design. In R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge handbook of the learning sciences* (2nd ed., pp. 358–376). Cambridge: Cambridge University Press.

Dimmel, J., & Bock, C. (2017). Handwaver: a gesture-based virtual mathematical making environment. In G. Aldon & J. Trgalovǎ (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. (pp. 323-330). Lyon, France.

Kim, M., Roth, W. M., & Thom, J. (2011). Children's gestures and the embodied knowledge of geometry. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9* (1), 207-238.

Ng O.L., Sinclair N. (2018). Drawing in Space: Doing Mathematics with 3D Pens. In: Ball L., Drijvers P., Ladel S., Siller HS., Tabach M., Vale C. (eds) *Uses of Technology in Primary and Secondary Mathematics Education*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-76575-4_16

Pittalis, M., & Christou, C. (2010). Types of reasoning in 3D geometry thinking and their relation with spatial ability. *Educational Studies in Mathematics* , *75* (2), 212–191.

Widder, M., Berman, A., & Koichu, B. (2019). An a priori measure of visual difficulty of 2-d sketches depicting 3-d objects. *J. for Research in Mathematics Education*, *50* (5), 489-528.

השפעת המשוב האישי המפורט והמקוון על תהליכי השערות תלמידי תיכון

רז הראל[1,2], מיכל ירושלמי[1], שי אולשר[1]

[1] אוניברסיטת חיפה; [2] המכללה האקדמית לחינוך ע"ש דוד ילין

רקע תיאורטי

ההתפתחויות הטכנולוגיות המואצות מעמידות לרשותנו כלים לניתוח מיידי על פי הבטים מגוונים של עבודת התלמידים. בכך הן מאפשרות מתן משובים אוטומטיים אישיים על עבודתם של התלמידים בסביבות דיגיטליות עשירות. שאלה רלוונטית היא האם וכיצד משפיעים משובים אוטומטיים אלו על תהליכי הלמידה העצמית של התלמידים.

סוג נפוץ של משובים הינם משובים מפורטים (Elaborated Feedback). משובים מפורטים מספקים לתלמידים הסברים מדוע תשובותיהם נכונות או שאינן נכונות (Shute, 2008). תהליך הלמידה בו התמקדנו עוסק בגיבוש השערה. תהליכי גיבוש ההשערה הינם תהליכי חקר איטרטיביים במהלכם מעלים התלמידים השערות, מפריכים חלק מהן, מנסחים השערות חדשות ובסופו של דבר בוחרים את ההשערה אותה יצדיקו בהמשך עבודתם (Boero, Garuti, & Lemut, 2007). לצורך המחקר נעזרנו בפלטפורמת המרא"ה (STEP), התומכת במשימות מתמטיות מבוססות־דוגמה (Example Eliciting Task) ומספקת משוב על עבודת התלמידים במשימות אלו. משימות מבוססות־דוגמה הינן משימות במהלכן מגישים התלמידים דוגמאות המייצגות את דימויי המושג או המתמטיקה של המושג (Olsher, Yerushalmy, & Chazan, 2016). המשוב האישי המפורט אותו חקרנו מורכב מרשימת מאפיינים (מונחים, ייצוגים, תהליכים) מתמטיים של המשימה. רשימת המאפיינים מעוצבת מראש, כחלק מתכנון המשימות. ל־STEP יכולת לנתח את הדוגמאות שהוגשו ולסמן את המאפיינים שהוא מזהה בדוגמאות שהגישו התלמידים. בכך יוצר STEP משוב אישי אוטומטי ומפורט. במחקר ביקשנו לבחון האם וכיצד משפיעים משובים אוטומטיים ומפורטים שכאלו, הניתנים לתלמידים במהלך עבודתם על משימות בסביבות דיאגרמות דינאמיות, על תהליכי גיבוש השערתם?

מידע מתודולוגי

המחקר בוצע בשני סבבי מחקר. מטרת הסבב הראשון הייתה לבחון את השפעת המשוב על תהליכי ההשערה של התלמידים. הוא בוצע בשיטת מחקר איכותנית וכלל 6 זוגות משתתפים (12 משתתפים).אוכלוסיית המחקר הורכבה מתלמידי תיכון בשכבות י'-יב' ברמת 5 יח"ל. תחילה עוצבו שלוש משימות מבוססות־דוגמה המעודדות תהליכי העלאת השערות. לאחר מכאן ביצעו זוגות המשתתפים את המשימות בסביבת דיאגרמות דינאמיות בעזרת מראיין בשיטת ראיון מבוסס משימה (task-based interview). במשימות התבקשו המשתתפים להגיש שלוש דוגמאות, שונות ככל האפשר, המייצגות את השערותיהם. לאחר הגשת שלוש הדוגמאות קיבל כל זוג משוב מפורט אישי ואוטומטי על הדוגמאות שהגיש. בשלב זה הייתה למשתפים אפשרות לחזור למשימה ולהגיש דוגמאות חדשות. בעזרת האפשרות לחזור למשימה ביקשנו לעורר את התלמידים לרפלקציה עצמית שתעודד אותם להעזר במשוב שהתקבל. בנוסף, האפשרות לחזור למשימה נתנה בידנו את היכולת לבחון האם נעזרו המשתתפים במשוב בכדי לנסח השערות חדשות והאם בעזרת המשוב השתנה

מרחב הדוגמאות האישי של המשתתפים. ראיונות הסבב הראשון צולמו, ותומללו. נתוני הגשות התלמידים נאספו באמצעות פלטפורמת STEP. בניתוח תמלילי הראיונות בקשנו לבחון האם וכיצד השפיע המשוב האישי המפורט על תהליכי השערות המשתתפים.

בסבב המחקר השני בחנו בצורה כמותית את קיומן של תופעות שנצפו בסבב המחקר הראשון והעידו על השפעת המשוב על תהליכי ההשערות. בסבב זה השתתפו 58 תלמידי תיכון מבתי ספר שונים באזור ירושלים ומשכבות גיל ט'-יא' (בסבב השני לא השתתפו תלמידים שהשתתפו בסבב הראשון).המשתתפים ביצעו את המשימות שהופיעו בסבב הראשון, אולם הפעם כחלק מסיטואציה כיתתית שהונחתה על ידי אחד הכותבים כמורה אורח. על ממצאי הסבב השני ביצענו את הניתוחים הבאים:1) אחוז המשתתפים שבחרו לשוב לפעילות, 2) אחוזי השינוי במרחב הדוגמאות האישי של המשתתפים ו־3) ניסוח השערות חדשות.

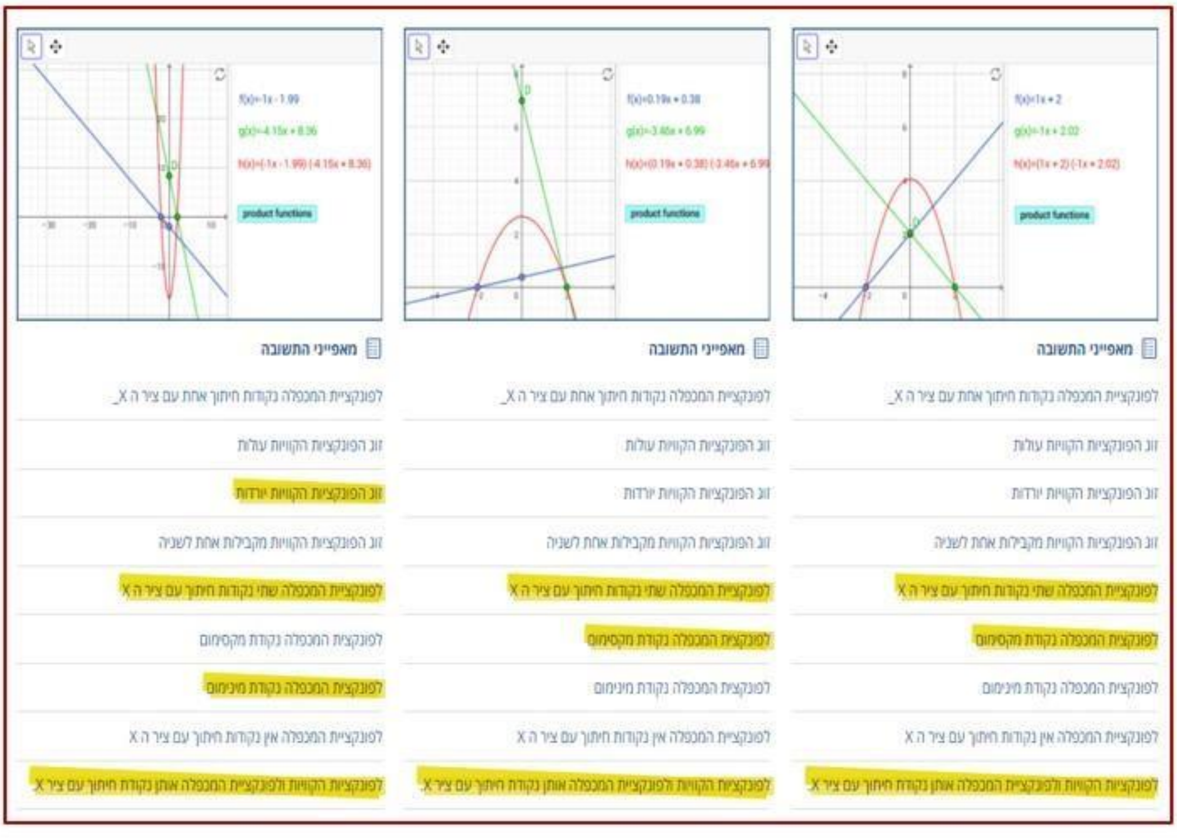
המשימה והמשוב האוטומטי המפורט

מתוך שלוש המשימות שעוצבו עבור המחקר, נתמקד במשימה שנוסחה באופן הבא:

"ביישומון זוג פונקציות קוויות. על ידי לחיצה על הכפתור הכחול תוכלו להציג את הפונקציה המתקבלת ממכפלת זוג הפונקציות הקוויות. גררו את הנקודות הכחולות והירוקות שעל הפונקציות וצרו פונקציות קוויות **שאינן קבועות**. **אילו סוגי פונקציות מתקבלות ממכפלת זוג פונקציות קוויות שאינן קבועות? פרטו ככל האפשר.** נסחו את תשובתכם בתיבת השיח והגישו שלוש דוגמאות שונות ככל האפשר המייצגות את תשובתכם".

איור 1

צילום מסך של דוגמה למשוב אישי אוטומטי אותו קיבל אחד המשתתפים



באיור 1 ניתן לראות שלושה צילומי מסך של היישומון – שלוש הדוגמאות שהגיש תלמיד. מתחת לכל דוגמה ניתן לראות את רשימת המאפיינים המתמטיים המהווה את המשוב האישי המפורט. כיוון שבמשימה התבקשו התלמידים להגיש שלוש דוגמאות מופיעים זה לצד זה שלושה משובים. המאפיינים הצהובים הינם המאפיינים ש־STEP זיהה בכל הגשה.

ממצאי סבב המחקר הראשון

ממצאי סבב המחקר הראשון תוארו אצל Harel, Olsher, and Yerushalmy (2019). כאן נביא את הממצאים המרכזיים שהתקבלו והיוו את הבסיס לעיצוב סבב המחקר השני. ע"פי הממצאים, בעקבות קבלת המשוב היו זוגות של תלמידים שבחרו לשוב לפעילות על מנת להגיש דוגמאות נוספות, שינו את מרחב הדוגמאות האישי שלהם וניסחו השערות חדשות. נביא כדוגמא את מקרה החקר של זוג המשתתפות בר ויסמין. במהלך עבודתן על המשימה *מכפלת פונקציות* ניסחו המשתתפות השערות המתמקדות בחקר השפעת שיפועי הפונקציות הקוויות על פונקציית המכפלה כגון: *כאשר לפונקציות הקוויות יש שיפוע חיובי פונקציית המכפלה הינה פרבולה מחייכת.* המיקוד בהשפעת השיפועים השתקף גם בדוגמאות שהגישו המשתתפות שהתאפיינו בזוגות של פונקציות בעלות שיפועים מגוונים. כך למשל, זוג פונקציות קוויות עולות, זוג פונקציות קוויות מקבילות וזוג פונקציות קוויות בהן האחת עולה והשנייה יורדת.

לאור קבלת המשוב וההבחנה של המשתתפות במאפיין: "לפונקציית המכפלה אין נקודת חיתוך עם ציר ה־X" המופיע במשוב, הן ביקשו לבחון: *"האם ניתן לקבל פונקציית מכפלה ללא נקודת חיתוך עם ציר ה־X?"* . בעקבות זאת הן בחרו לשוב למשימה. בניגוד לדוגמאות שהגישו המשתתפות לפני קבלת המשוב, תהליך החקר שלאחר קבלת המשוב כלל פונקציות מכפלה בעלות נקודת חיתוך אחת עם ציר ה־X. בכך ניתן היה להבחין בשינוי במרחב הדוגמאות של המשתתפות. תהליך החקר הוביל אותן למסקנה הבאה: *"לא. אי אפשר לקבל פונקציה ריבועית מרחפת. פונקציית המכפלה תמיד תהיה פרבולה ולפונקציית המכפלה ולפונקציות הקוויות יש את אותן נקודות איפוס. לפונקציות הקוויות הלא קבועות תמיד תהיה נקודת איפוס. לכן גם לפונקציית המכפלה תמיד תהיה לפחות נקודת איפוס אחת."* מקרה זה הינו מקרה מייצג של זוגות משתתפים שבעקבות קבלת המשוב בחרו לשוב לתהליך החקר, שינו את מיקוד החקר ואת מרחב הדוגמאות האישי וניסחו השערה חדשה.

ממצאי סבב המחקר השני

בעקבות ממצאי הסבב הראשון, בסבב המחקר השני התמקדנו בבדיקת: 1) אחוז המשתתפים ששבו למשימה, 2) אחוז השינוי במרחב הדוגמאות האישי של המשתתפים ו־3) ניסוח השערות חדשות.

על פי הממצאים: מתוך כלל משתתפי הסבב השני, כ־70% בחרו לשוב לפעילות לאחר קבלת המשוב. האחוז הגבוה של המשתתפים שבחרו לשוב לחקור ולבצע את הפעילות פעם נוספת מעיד כי מקרי חקר שנצפו בסבב המחקר הראשון כגון מקרה החקר של בר ויסמין בהם בחרו המשתתפים לשוב לחקר כתוצאה מקבלת המשוב, היו המקרים הרווחים מקרב משתתפי המחקר.

על מנת לבחון את השינוי במרחב הדוגמאות האישי, הגדרנו את שני המשתנים הבאים: גיוון בנקודות האיפוס וגיוון בשיפועים. תלמיד הוגדר כ'בעל גיוון בנקודות האיפוס' אם בשלוש הדוגמאות שהגיש במשימה נמצאו לפחות שתי הגשות השונות באופיין. כך למשל, תלמידים שבשלוש דוגמאותיהם הופיעו רק פונקציות מכפלה בעלות שתי נקודות איפוס הוגדרו כ*'לא בעלי גיוון על פי נקודות האיפוס'*.

תלמידים שבשלוש דוגמאותיהם הופיעו פונקציות מכפלה בעלות שתי נקודות איפוס ובעלות נקודת איפוס אחת הוגדרו כ'בעלי גיוון בנקודות האיפוס'. באותו האופן, תלמידים הוגדרו כ'בעלי גיוון בשיפועים' אם בשלוש הדוגמאות שהגישו נמצאו לפחות שתי דוגמאות בעלות אופי שונה. על פי הממצאים, מבין כלל התלמידים שהשתתפו במחקר כ־77% נמצאו כ'לא בעלי גיוון בנקודות איפוס'. לעומת זאת, כ־90% נמצאו כ'בעלי גיוון בשיפועים'. ממצאים אלו מלמדים כי בדומה למקרי חקר כמו של בר ויסמין, במהלך החקר שקדם לקבלת המשוב האישי התמקדו רוב המשתתפים בבחינת השפעת שיפועי הפונקציות הקוויות על פונקציית המכפלה וכמעט שלא בחנו את מספר נקודות האיפוס של פונקציית המכפלה. מניתוח מרחב הדוגמאות האישי של התלמידים לאחר קבלת המשוב עלה כי מתוך כלל התלמידים שבחרו לשוב ולבצע את הפעילות, כ־92% נמצאו כבעלי גיוון בנקודת האיפוס. גם כאן התקבלה תמונה דומה למקרה של בר ויסמין ובה לאחר קבלת המשוב מיקדו המשתתפים את תהליך החקר במספר נקודות האיפוס של פונקציית המכפלה.

בניתוח השערות התלמידים בדקנו עבור כל משתתף האם לאחר קבלת המשוב הוא ניסח השערה חדשה אותה לא ניסח לפני קבלת המשוב. על פי הממצאים, מבין כלל התלמידים שבחרו לחזור לפעילות לאחר קבלת המשוב, 81% ניסחו השערות חדשות. בעקבות תהליכי חקר כגון התהליך של בר ויסמין בדקנו כמה תלמידים ניסחו בהגשה השנייה את ההשערה: *"ממכפלת זוג פונקציות קוויות שאינן קבועות לא תתקבל פונקציית מכפלה מרחפת"*. מצאנו כי כ־64% מתוך התלמידים שניסחו השערות חדשות ניסחו השערה שכזו. ממצאים אלו מחזקים את ממצאי המחקר האיכותני ומלמדים על גודל השפעתו של המשוב האישי המפורט על תהליך גיבוש ההשערה.

מסקנות

במחקר הנוכחי ביקשנו לבחון את השפעת המשוב האישי המפורט על תהליכי גיבוש השערות של התלמידים. על פי הממצאים ניתן ללמוד כי המשוב האישי המפורט השפיע על: 1) בחירת התלמידים לשוב לתהליך החקר; 2) מרחב הדוגמאות האישי של התלמידים; 3) ניסוח השערות חדשות. השפעת המשוב האישי המפורט על שלושה פרמטרים אלו מעידה על הפוטנציאל הטמון במשוב האישי על השלבים המרכזיים בתהליכי חקר והשערה בפרט ועל תהליכי הלמידה בכלל. עידוד התלמידים לשוב לחקר האיטרטיבי של תהליך העלאת השערות הוא אתגר ידוע (Boero, Garuti, & Lemut, 2007). פוטנציאל ההתמודדות עם אתגר זה שמציע המשוב האישי המפורט פותח פתח לאופנים חדשים של שילוב תהליכי השערות בסיטואציות לימוד כיתתיות ואישיות. אופנים הטומנים בחובם העמקה של תהליכים אלו וכיווני מחקר חדשים.

תודות המחקר בוצע בתמיכתה של הקרן הלאומית למדע – ISF (grant 147/18). www.isf.org.il

רשימת מקורות

Boero, P., Garuti, R., & Lemut, E. (2007). Approaching theorems in grade VIII: Some mental processes underlying producing and proving conjectures, and conditions suitable to enhance them. In P. Boero (Ed.), *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 249–264). Rotterdam: Sense Publishers.

Harel, R., Olsher, S. & Yerushalmy, M. (2019). Designing online formative assessment that promotes students' reasoning. *Proceedings of the 14th International Conference on*

Technology in Mathematics Teaching. Essen, Germany: ICTMT. https://duepublico2.uni due.de/receive/duepublico_mods_00070762

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How might the use of technology in formative assessment support changes in mathematics teaching? *For the Learning of Mathematics*, 36(3), 11-18.

Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of Educational Research,* 78(1), 153-189.

שימוש בלמידת מכונה לצורך סיווג משימות מתמטיות אינטראקטיביות בסביבת למידה מקוונת

אלעד יעקבסון[1], שי אולשר[2], גיורא אלכסנדרון[1]

[1] מכון ויצמן למדע; [2] אוניברסיטת חיפה

תקציר

סביבות למידה ממוחשבות במתמטיקה, אשר נועדו לאפשר למידה מותאמת אישית, מסתמכות לרוב על מאגרים של משאבי למידה דיגיטליים מגוונים ועל מטה־דאטה המספק תיאור של מאפיינים רבים ומגוונים של משאבי הלמידה. מטה דאטה זה נקרא 'מידע סמנטי' ונועד לאפשר לתוכנות כגון מערכות המלצה, למורים ולתלמידים להשתמש באופן מושכל במשאבים ולבחור את המשאבים שמתאימים בצורה הטובה ביותר לצרכיהם והעדפותיהם. יצירת המידע הסמנטי על משאבי הלמידה בדרך כלל מבוצעת על ידי מומחים, אולם תהליך זה הוא ארוך, יקר, ואינו נותן מענה לאופי הדינמי של השימוש במשאבים. לכן, שיטות תיוג אוטומטיות או אוטומטיות־למחצה יוכלו לייעל ולשפר את תהליך הבניה והנגישות של חומרים בתוך סביבות למידה דיגיטליות. מאמר זה מתאר מחקר חלוץ שנועד לבדוק התכנות לתיוג אוטומטי של משימות אינטראקטיביות ממוחשבות על ידי שימוש באלגוריתמים של למידת מכונה. המשימות נלקחו מסביבת למידה מקוונת המיועדת ללימוד מתמטיקה. על בסיס ניתוח מילות מפתח שנמצאות בטקסטים של משימות אלו, הן סווגו על ידי אלגוריתמים ממוחשבים לפי התחום המתמטי בו הן עוסקות. הסיווג של האלגוריתמים הושווה לסיווג של מומחי תוכן, ונמצאה התאמה של מעל 95% בסיווג. ממצאים אלו מצביעים על הפוטנציאל שיש לשיטות מבוססות למידת־מכונה לסייע בתיוג משאבי למידה.

רקע

סביבות למידה ממוחשבות, שנועדו לאפשר למידה מותאמת אישית ולתמוך בה, נסמכות לרוב על מאגרים של משאבי למידה ממוחשבים (כגון מצגות, סרטוני וידאו, מסמכים, שאלונים, קישורים לאתרי אינטרנט, פעילויות אינטראקטיביות, ועוד) ועל מטה־דאטה המספק מידע סמנטי עשיר לגבי המשאבים הללו (Downes, 2007). המונח "מידע סמנטי" מתייחס למידע לגבי התוכן והמאפיינים של משאבי הלמידה: תחום הידע בו הם עוסקים, לאיזו כיתה הם מיועדים, רמת הקושי, משך הזמן, עזרים טכנולוגיים נדרשים, האם הם נועדו לשימוש בכיתה או בבית, סוג המשוב שהם מכילים, ועוד. המידע הסמנטי חיוני הן למורים המשתמשים במערכת, על מנת לאפשר להם לחפש תוכן מתאים עבור כיתותיהם; הן למנגנונים של בינה מלאכותית שאמורים לסרוק את מאגרי המשאבים הללו, לסנן תכנים ולהמליץ ללומדים על המשאבים הרלוונטיים עבורם; והן לטובת העברה של תכנים ומשאבים בין סביבות למידה שונות והקשרים חינוכיים שונים (Anderson & Whitelock, 2004; Aroyo & Dicheva, 2004; Bittencourt et al., 2008). למרות זאת, בעוד שמאגרי משאבים מהסוג המתואר

לעיל קיימים וזמינים כיום בהיקף נרחב יחסית, דווקא המידע הסמנטי הוא זה שבמקרים רבים לוקה בחסר, חלקי או שגוי (Brooks & McCalla, 2006). לפיכך, מציאת תהליכים שיאפשרו ליצור מידע סמנטי בצורה יעילה ובהיקפים גדולים יכולה לתרום רבות לתהליכי פרסונליזציה של סביבות למידה.

דרך אחת ליצור מידע סמנטי היא על ידי מומחי־תוכן, אולם לתהליך שכזה ישנן מספר מגבלות: ראשית, הוא דורש השקעת זמן רב ותקציבים משמעותיים (Thacker et al., 2018). שנית, מומחים בתחום התוכן הם לא בהכרח גם בעלי מומחיות בתחום החינוך או הלמידה, ולכן לא תמיד מספקים את המידע המדויק ביותר לגבי משאבי הלמידה (McCalla, 2004). ולבסוף, מאגרי משאבי למידה הם לרוב דינמיים באופיים – משאבים מתווספים, נגרעים, עוברים אדפטציות ושינויים, או מוסבים לטובת שימוש בהקשרים שונים (Cooper, Olsher & Yerushalmy, 2020). למשל: פעילות של לימוד נושא חדש עבור כיתה ז' יכולה לשמש גם כפעילות חזרה לתלמידי כיתה ח'. בהתאם, גם תהליך יצירת המידע הסמנטי לגבי המשאבים אמור להתבצע בצורה מתמשכת ובאופן גמיש ואדפטיבי – בניגוד לתהליך היצירה על ידי מומחה תוכן.

מטרת ניסוי זה היא לבחון פתרון אפשרי למגבלות המתוארות לעיל, על-ידי יצירת מידע סמנטי ממוקד בתחום הדעת (במקרה זה – מתמטיקה), וזאת באופן אוטומטי באמצעות אלגוריתמים של למידת מכונה (Anderson & Whitelock, 2004; Cardinaels, 2005; McCalla, 2004). בתהליך זה נאסף מידע על משאבי הלמידה: טקסטים, תמונות, קוד מחשב (של אפליקציות אינטראקטיביות), נתוני שימוש של הלומדים במשאב ונתונים לגבי ביצועים של הלומדים במשאב, ואז מופעלים אלגוריתמים של בינה מלאכותית במטרה לנתח את המידע על אותו משאב ולספק תובנות שימושיות לגביו.

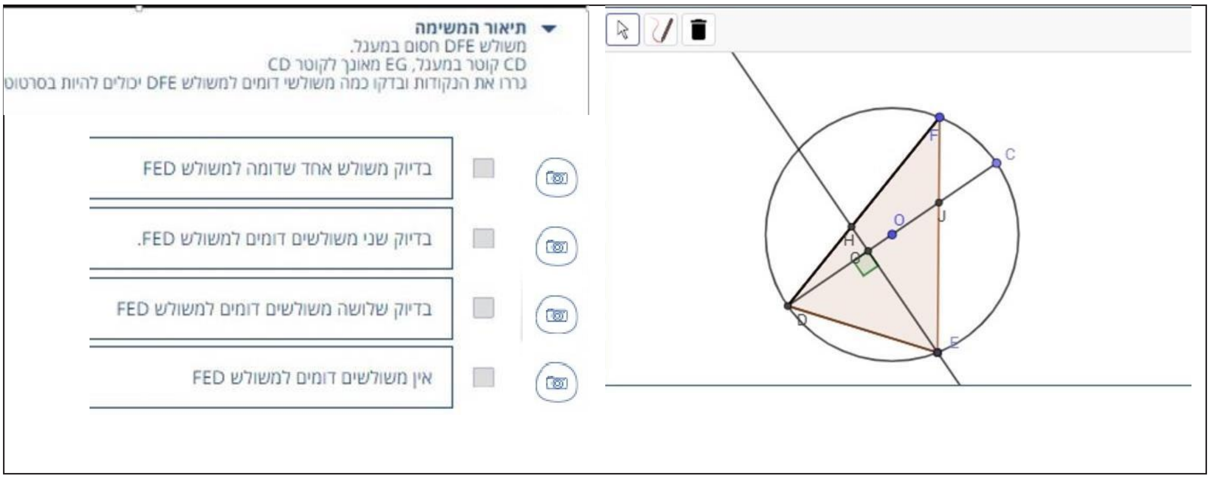
סביבת הלמידה – המרא"ה

בניסוי זה בוצע שימוש בסביבת הלמידה המרא"ה: סביבה מתוקשבת המפותחת ומתוחזקת באוניברסיטת חיפה, מיועדת להוראה ולמידה של מתמטיקה, ונמצאת בשימוש בבתי ספר יסודיים, בחטיבות ביניים, בחטיבות עליונות ואף במוסדות אקדמיים. המרא"ה מכילה הן מאגר פעילויות ממוחשבות המבוססות על GeoGebra (תוכנה חינמית שזמינה ברשת ליצירת פעילויות אינטראקטיביות בתחום המתמטיקה), והן מערכת ניהול למידה עבור מורים ותלמידים. כיום יש במערכת המרא"ה מעל 140 פעילויות שונות, שכל אחת מהן מכילה מספר משימות, ובסה"כ מכילה מעל 400 משימות (**איור 1**). במשימה אופיינית במערכת מופיעה חלונית ובה תרשים אינטראקטיבי מבוסס GeoGebra, ושאלה או מספר שאלות לגבי תרשים זה. התלמיד נדרש לבצע פעולות של בניה, גרירה, הכנסת ערכים או יצירה של דוגמאות התואמות טענות מתמטיות שונות, ולענות על השאלות. המשימות במערכת המרא"ה ניתנות לחלוקה לשישה תחומים מתמטיים: אלגברה, גיאומטריה, חדו"א, גיאומטריה אנליטית, טריגונומטריה,או בעיות מילוליות. המערכת נמצאת כיום בשימוש של עשרות מורים ומאות תלמידים בישראל, כוללת ממשק עבודה מלא בערבית, ובנוסף נמצאת בשימוש באיטליה, ארה"ב וגרמניה.

המרא"ה מאפשרת למורה לחפש פעילויות בנושאים שונים ולפי קריטריונים שונים, להקצות פעילויות לתלמידי הכיתה, לקבל ניתוח של תשובותיהם, וכך ללמוד על מצבם של תלמידים ספציפיים, קבוצות תלמידים או של הכיתה כולה, לאבחן קשיים, חוזקות, או מאפיינים נוספים בתהליך הלמידה אשר ניתנים לניתוח מהתשובות המוגשות, ולהתאים את המשך ההוראה בהתאם לנתונים אלו.

איור 1

דוגמה למשימה מתוך סביבת הלמידה המרא"ה



שאלת המחקר

האם ניתן לסווג פעילויות במערכת המרא"ה לפי התחום המתמטי בו הן עוסקות על ידי למידת מכונה, ומה רמת ההסכמה בין הסיווג המתקבל באמצעות האלגוריתמים של למידת המכונה לסיווג של מומחה התוכן?

מתודולוגיה וממצאים

לצורך ניסוי זה נבחרו 406 משימות ממערכת המרא"ה.המשימות שנבחרו היו כאלו שהן בשפה העברית בלבד.בשלב הראשון נעשה ניסיון לסווג את המשימות בצורה אוטומטית על-ידי שימוש בקוד ה־GeoGebra של כל משימה. הרציונל מאחורי ניסיון זה התבסס על ההנחה שמשימות שעוסקות בתחומים מתמטיים שונים, יעשו שימוש באובייקטים מסוגים שונים (למשל: משימות שעוסקות בגיאומטריה יכללו בתוכן אובייקטים מסוג מצולע, קטע, זווית וכדומה, בעוד שמשימות שעוסקות באלגברה יכללו אובייקטים מסוג גרף או משוואה), ושהבדל זה יבוא לידי ביטוי בקוד המחשב של המשימה. לצורך כך הופעל אלגוריתם של למידת מכונה מסוג decision tree על קוד ה-GeoGebra של המשימות. הסיווג שהתקבל על-ידי האלגוריתם הושווה לסיווג של מומחה תוכן, ורמת ההסכמה בין הסיווגים הייתה נמוכה – כ־70% הסכמה. סיבה אפשרית לחוסר ההצלחה של האלגוריתם המבוסס על קוד ה־GeoGebra, היא שבהרבה מהמשימות התלמידים מקבלים חלונית שמכילה מערכת צירים קרטזית בלבד וסרגל כלים עם פקדים שונים, ללא אובייקטים כלל, והם נדרשים לבנות בעצמם דוגמאות ואובייקטים בהתאם לדרישות המשימה. במצב זה קוד ה־GeoGebra של המשימות מכיל מעט מאד מידע שיכול לשמש את האלגוריתם לצורך סיווג.

לאור חוסר ההצלחה, בוצע ניסיון שני לסווג את המשימות על סמך המלל המופיע בהנחיות הניתנות לתלמידים או בשאלות עצמן. לשם כך הוגדרו 49 מילות מפתח, כגון: "משולש", "פונקציה", "מהירות", "זווית", "נגזרת", "שיפוע", "רציף", "תחום הגדרה", "מקבילית", "זמן", "משיק", "לינארית", וכו'. בכל משימה נבדק אילו ממילות המפתח הנ"ל מוכלות במלל של אותה משימה. התוצאה של בדיקה זו היא מטריצה בגודל של 406 שורות (המשימות) X 49 עמודות (מילות המפתח), כאשר אם מילת המפתח מוכלת במלל של אותה משימה, אזי המשבצת המתאימה במטריצה מכילה את הספרה '1', ואם

המילה אינה מוכלת המשבצת המתאימה מכילה את הספרה '0' (**איור 2**). המשימות סווגו על ידי מומחה תוכן לפי תחום הידע בו המשימה עוסקת: אלגברה, גיאומטריה, חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי, טריגונומטריה,הנדסה אנליטית או בעיות מילוליות.

איור 2

תמונה חלקית של טבלת מילות מפתח בטקסט משימות המרא"ה

		מילות מפתח														
מס' פעילות	סיווג	מעגל	טרפז	מקבילית	מרובע	משוואה	פונקציה	רציונלית	נגזרת	אסימפטוטות	קיצון	משיק	שורש	פולינום	קצב	מהירות
21	גיאומטריה	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
22	גיאומטריה	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	גיאומטריה	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	אלגברה	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
25	אלגברה	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
26	חדו"א	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0
27	גיאומטריה	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

על טבלה זו הופעלו שלושה אלגוריתמים של למידת מכונה מסוג supervised learning: Naïve Bayes (NB), Logistic Regression (LR), ו-Random Forest (RF). 75% מהמשימות במטריצה הוגדרו כ־training set, כלומר האלגוריתמים "התאמנו" על משימות אלו כדי ללמוד את הקשר בין קיומן של מילות מפתח מסוימות לבין סיווג המשימה לתחום בו היא עוסקת. 25% המשימות הנותרות הוגדרו כ־test set, כלומר לאחר שאלגוריתמים ביצעו את תהליך האימון והלמידה על ה־training set הם סיווגו את הפעילויות ב־test set. לאחר מכן השווינו בין הסיווג שהתקבל מהאלגוריתמים לסיווג של מומחה תוכן. בין הסיווג שהתקבל מהאלגוריתמים NB ו־RF לבין הסיווג של מומחה התוכן הייתה רמת הסכמה של 95.13%. בין הסיווג שהתקבל מהאלגוריתם LR לבין הסיווג של מומחה התוכן הייתה רמת הסכמה של 91.93%.

דיון ומסקנות

מטרת הניסוי הייתה לבחון האם ניתן לייצר מידע סמנטי על משאבי למידה ממוחשבים באופן אוטומטי, על ידי אלגוריתמים של למידת מכונה. התוצאות מלמדות כי ברמת סיווג בסיסית של משימות לפי התחום בו הן עוסקות, האלגוריתמים הממוחשבים מצליחים לספק סיווג ברמה טובה ביחס לסיווג של מומחה תוכן. אמנם, ניתן לטעון כי הסיווג המתקבל כאן אינו בעל ערך רב עבור המורים שכן החלוקה היא מאד גסה וראשונית, אולם זהו צעד ראשון בדרך לפיתוח שיטות ליצירת מידע סמנטי שיפחיתו בצורה משמעותית את הצורך בהשקעת זמן ומשאבים אנושיים. חשוב לציין שהשימוש הסביר באלגוריתמים כאלו אינו דווקא כתחליף מוחלט למומחה אנושי, אלא ככלי מסייע שיבצע מיון וסיווג ראשוני שיעבור בהמשך תיקוף על ידי מומחים או מורים שמשתמשים במערכת. בהמשך המחקר יש כוונה להפעיל תהליכי סיווג דומים על מאגרי משאבים נוספים, בתחומי ידע נוספים, ולהגיע לסיווג ברמת פירוט גבוהה ומדויקת יותר. כיוון נוסף שנבחן הוא כריית מידע קונטקסטואלי בצורה אוטומטית מתוך השימוש של המורים במשאבים. למשל: האם מורים משתמשים במשאב מסוים בתחילת תהליך הלימוד או בסיומו, האם הם משתמשים בו בכיתה או בבית, וכדומה. בהקשר זה, אחת השאלות שמתעוררת היא מהו המידע הרלוונטי שבאמת מסייע למורים לחפש ולגלות את המשאבים המתאימים להם, ומהי הטרמינולוגיה המתאימה לתיאור מידע זה (Robutti et al., 2019). שאלות אלו יצטרכו גם הן להיבחן באופן שיטתי ומסודר במחקרי המשך.

רשימת מקורות

Anderson, T., & Whitelock, D. (2004). The educational semantic web: Visioning and practicing the future of education. *Journal of interactive Media in Education*, *2004(1)*, 1-15

Aroyo, L., & Dicheva, D. (2004). The new challenges for e-learning: The educational semantic web. *Journal of Educational Technology & Society, 7(4)*, 59-69

Bittencourt, I. I., Isotani, S., Costa, E., & Mizoguchi, R. (2008). Research directions on Semantic Web and education. *Interdisciplinary Studies in Computer Science*, *)1(91*, 60-67

Brooks, C., & McCalla, G. (2006). Towards flexible learning object metadata. *International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning*, *16(1-2)*, 50-63

Cardinaels, K., Meire, M., & Duval, E. (2005). Automating metadata generation: the simple indexing interface. In *Proceedings of the 14th international conference on World Wide Web* (pp. 548-556)

Cooper. J., Olsher, S., & Yerushalmy, M. (2020). Didactic metadata informing teachers' selection of learning resources – Boundary-crossing in professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education.* *23,* 363-384. https://doi.org/10.1007/s10857-01909428-1

Downes, S. (2007). Models for sustainable open educational resources*. Interdisciplinary Journal of E-Learning and Learning Objects,)1(3*, 29-44

McCalla, G. (2004). The ecological approach to the design of e-learning environments: Purpose-based capture and use of information about learners. *Journal of Interactive Media in Education, (40027)*, 1 - 23

Robutti, O., Aldon, G., Cusi, A., Olsher, S., Panero, M., Cooper, J., Carante, P., & Prodromou, T. (2019). Boundary objects in mathematics education and their role across communities of teachers and researchers in interaction. In Lloyd, G. M. & Lynch, C. (Eds.) *The Second Edition of the International Handbook of Mathematics Teacher Education* (pp. 211-)042. Brill, Leiden.

Thaker, K. M., Brusilovsky, P., & He, D. (2018). Concept enhanced content representation for linking educational resources. In *2018 IEEE/WIC/ACM International Conference on Web Intelligence (WI)* (pp. 413-420). IEEE

עיצוב בעיות אוריינות מתמטית בהקשר של טכנולוגית הבלוקצ'יין והתאמתן לתוכנית הלימודים בתיכון

זהבית כהן, <u>יסמין גרה־בדראן</u>

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

רקע תאורטי

חשיבותה של המתמטיקה בתחום החינוך נתפסת במדינות רבות כגורם מרכזי להכנת התלמידים לחייהם האקדמיים ולתעסוקה עתידית (De Lange, 2006). עם זאת, חומרי ההוראה המסורתיים בתחום החינוך המתמטי הינם לרוב מופשטים או תיאורטיים ואינם חושפים את התלמידים לבעיות אותנטיות שמציגות את שימושי המתמטיקה בהקשר של החיים האמיתיים (Steen, Turner & Burkhardt, 2007; Verschaffe et.al., 2020). בעיה אותנטית הינה בעיה הנגזרת ממצבים בחיים האמיתיים (מחוץ למתמטיקה), שיכולה להיות קשורה לסיטואציות במקום העבודה, להקשר מדעי או לכל תחום מחוץ לבית הספר. עם זאת,תלמידים לרוב נחשפים לבעיות אותנטיות דרך שימוש בבעיות מילוליות אשר כוללות תיאור מילולי של תרחישים מחוץ לבית־הספר. אולם, מכיוון שההקשר הנתון בבעיות אלו לרוב אינו אמיתי או לא בעל חשיבות בעולם האמיתי, תלמידים נוטים להתעלם מההקשר של הבעיה ושמים דגש על הפתרון המתמטי בלבד (Kaiser, 2017). בפרט, תוכנית הלימודים הקיימת אינה חושפת תלמידים ליישומי מתמטיקה במקומות העבודה העתידיים עבורם, בפרט בתחומי המדע וההנדסה, או ליישומים טכנולוגיים מוכרים לתלמידים (Van der Wal, Bakker, & Drijvers, 2017).

על כן, תלמידים רבים לא רואים את הצורך, היישום או הרלוונטיות של המתמטיקה לחיי היומיום, ובפרט לשימושי המתמטיקה בתחומי המדעים וההנדסה, כפי שהם משתקפים בפיתוחים טכנולוגיים שונים (Kaiser, Blum, Borromeo Ferri, & Stillman, 2011). דרישה זו של הבנת יישומיות המתמטיקה בחיי היומיום מתחברת לצורך של תלמידים להיות בעלי יכולת אוריינות מתמטית, כך שתלמידים יוכלו להשתמש בידע ובמיומנויות המתמטיות שיש ברשותם לצורך התמודדות עם האתגרים הכרוכים בחיים העתידיים כאזרחים מעורבים בחברה (De Lange, 2006).

אוריינות מתמטית

אוריינות מתמטית מתייחסת לשלושה הליכים מרכזיים: א) ניסוח מצבים בעולם האמיתי תוך שימוש במושגים מתמטיים, ב) יישום הליכים ואלגוריתמים מתמטיים כדי לקבל פתרון מתמטי לבעיה מהעולם האמיתי, ו־ג) פירוש והערכת הפתרון בחזרה למצב מהעולם האמיתי (Blum & Niss, 1991). התהליך של הניסוח מהווה את 'התרגום' של המצב בעולם האמיתי לייצוג מתמטי מתאים תוך שימוש במושגים וסימנים מתמטיים, ויכול לכלול הנחת הנחות או לזהות אילוצים של הבעיה. תהליך היישום עוסק בעבודה עם מודליים מתמטיים, ביצוע הליכים או אלגוריתמים, יישום או בנייה של אסטרטגיות בכדי להגיע לפתרונות מתמטיים לבעיה המתמטית. אחרי שמתקבל הפתרון המתמטי מתבצעת החזרה לבעיה בעולם האמיתי, ומתבצע תהליך הפירוש, שכולל בתוכו בדיקת התאמת הפתרון להיבטים בעולם האמיתי, תוך מתן הסברים מתמטיים לתוצאות ולמידת התאמתן למצב המקורי (OECD, 2018). המסגרת המושגית של PISA מגדירה מספר הקשרים שונים של העולם האמיתי:

הקשר אישי, חברתי, תעסוקתי או מדעי (יישומי מתמטיקה בטבע וטכנולוגיה) (Stacey & Turner, 2014). במחקר זה, מושם דגש על ההקשר המדעי־הנדסי, אשר מתקבל ממצבים שקשורים לטכנולוגיית הבלוקצ'יין החדשנית, שעליה יורחב בסעיף הבא.

טכנולוגיית הבלוקצ'יין

טכנולוגיית הבלוקצ'יין עוררה מהפכה בעולם הדיגיטלי, החל מיישומה בשנת 2009, משום שהביאה נקודת מבט חדשה לבטיחות, גמישות ויעילות בתהליך תעבורה של מידע ברשת. טכנולוגיית הבלוקצ'יין הוצעה לראשונה בשנת 2008, ויושמה ב־2009 (Nakamoto, 2008). הטכנולוגיה מאפשרת העברת נתונים, כספים ומידע ללא צורך במתווכים, ובכך חוסכת את עלויות התיווך, תוך אמון, בטיחות ושקיפות (Ahram et.al, 2017). טכנולוגיית בלוקצ'יין כוללת קריפטוגרפיה, מתמטיקה, אלגוריתם ומודל כלכלי, ומשלבת רשתות בין עמית לעמית (peer-to-peer network) ושימוש באלגוריתם מבוזר לפתרון בעיית סנכרון מסדי נתונים מבוזרת. בתהליך הזה, השימוש במתמטיקה מהווה אבן בסיס בתהליך בניית מסד הנתונים (Niranjanamurthy & Jagannatha, 2019).

השימוש בבלוקצ'יין נפוץ היום בשירותים פיננסיים שונים כמו נכסים דיגיטליים, העברת תשלום ותשלום מקוון (Foroglou & Tsilidou, 2015). בנוסף, ניתן להשתמש בטכנולוגיה לצורך תחומים אחרים, כולל חוזים חכמים (Kosba et.al, 2016), כמו גם לעסקים הדורשים אמינות גבוהה וכנות למשל רישום מקרקעין (Benbunan-Fich & Castellanos, 2018), או שירותי בריאות (Mettler, 2016). שירותים אלו נחשבים כשירותים בסיסיים עבור המחייה של כל אזרח בחברה המודרנית, כך שניתן להסיק שהטכנולוגיה תחדור באופן עמוק לחיינו ותהיה חלק בלתי נפרד מהפיתוחים הטכנולוגיים שבהם נשתמש בעתיד.

שאלת המחקר

באיזה אופן שיתוף פעולה בין בעלי עניין שונים: מורים למתמטיקה, מומחים בחינוך מתמטי, חוקרים ומהנדסים בתחום ההנדסה, תורם לתהליך בניית ועיצוב משימות מתמטיות שמקדמות אוריינות מתמטית בהקשר של טכנולוגית הבלוקצ'יין?

מתודולוגיה

המסגרת המושגית של פיזה (OECD, 2018) משמשת כמסגרת התיאורטית לתהליך עיצוב הבעיות. תהליך העיצוב כולל 5 שלבים – שני שלבים מקדימים: 1) הבנת הרקע המדעי והפשטתו; 2) חיבור לנושא מתמטי – בחירת שכבת גיל ורמה מתאימה; ושלושה שלבים שמייצגים את שלושת השלבים העיקריים באוריינות מתמטית: 3) ניסוח – תכנון פתרון הבעיה ע"י תרגום המודל מהעולם האמיתי למודל מתמטי (מתמטיזציה); 4) יישום – עיצוב שאלות מתמטיות תוך שימוש בייצוגים שונים; ו־5) פירוש המודל המתמטי ותיקופו, לצורך וידוא כי הוא אכן עונה על ההקשר מהעולם האמיתי.

משתתפי המחקר הינם ארבעה מומחים בחינוך מתמטי, פרח הוראה בתחום החינוך המתמטי ושני מורים למתמטיקה, וכן שני מהנדסים וחוקרים באקדמיה בתחום הבלוקצ'יין.

כלי המחקר העיקרי אשר שימש להערכת רמת האוריינות המתמטית של המשימות המפותחות הינו מחוון חדשני שפותח לצורך המחקר הנוכחי. המחוון הינו דו־מימדי, כאשר מימד אחד כולל את שלושת התהליכים המרכזיים בתהליך אוריינות מתמטית מבוסס מידול: ניסוח, יישום ופירוש, והמימד השני

מתייחס לשלוש רמות שונות של כל אחד מהתהליכים: נמוכה, בינונית, וגבוהה. המחוון מאפשר להעריך כל שאלה במשימה באופן דו־מימדי, הן בהתייחס לרמת האוריינות: נמוכה, בינונית וגבוהה, והן בהתייחס לשלושת התהליכים המרכזיים של אוריינות מתמטית: ניסוח יישום ופירוש.

ממצאים

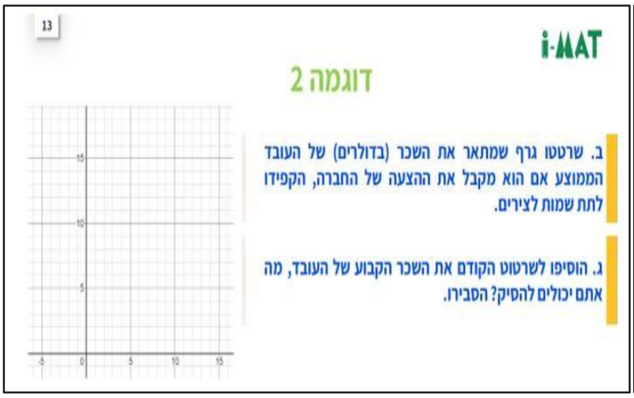
ממצאי המחקר מציגים ארבע משימות ברמת אוריינות גבוהה, אשר כל אחת מותאמת לרמה ולשכבת גיל שונה, ולתכנים שונים בתוכנית הלימודים: 1) הסתברות, המחברת את טכנולוגית הבלוקצ'יין לנושא המתמטי בתחום נוסחת ההסתברות הבינומית, ומתאימה לתכנית הלימודים בכיתה ט' תוך התייחסות לפעולת כריית הנתונים וההסתברות לבציע כרייה נכונה פעם בחודש; 2) פונקציות, המציגה ומחדדת את משמעות הפונקציה ומרחיבה את ההגדרה לפונקציה חד כיוונית שנמצאת בבסיס טכנולוגית הבלוקצ'יין בנוסף להגדרת מושג חדש של פונקציה הפיכה, ומתאימה לתכנית הלימודים בכיתות ח'-ט ; 3) גידול ודעיכה, אשר מתייחסת לגידול בערך של הביטקוין במהלך כל רבעון, כאשר התלמידים מתבקשים למצוא את קצב הגידול בחלק מהמשימות. משימה זו מותאמת לתוכנית הלימודים במתמטיקה ברמה של 4 ו-5 יחידות לימוד, עבור תלמידי כיתה י"ב; 4) סטטיסטיקה, המתייחסת לשימוש בטכנולוגית בלוקצ'יין בתעשייה, וליתרונות של שימוש בטכנולוגיה זו מבחינה כספית. השאלות המופיעות במשימה זו נוגעות במושגים סטטיסטיים חשובים כגון: שכיח, ממוצע וחציון וכן מפתחות מיומנויות חשובות של קריאת ובניית גרפים. המשימה מתאימה לתלמידי תיכון הלומדים ברמה של 3 יחידות לימוד.

המבנה של היחידות אחיד, כך שכל יחידה מתחילה ברקע מדעי על אודות טכנולוגית הבלוקצ'יין, אשר פושט על-ידי המומחים בחינוך מתמטי, ותוקף על-ידי המהנדסים והחוקרים בתחום, ולאחריה מתמטיזציה של המודל המדעי בהקשר של הבלוקצ'יין, תוך עיצוב שאלות מתמטיות על-ידי המומחים בחינוך המתמטי תוך שיתוף פעולה עם פרח ההוראה והמורים.

לצורך תיקוף הרמה האוריינית של כל משימה, לאחר עיצוב השאלות המתמטיות, מומחי החינוך המתמטי ביצעו ניתוח אורייני של כל אחת מהשאלות, על בסיס המחוון להערכת רמת אוריינות מתמטית. במידה והשאלה לא הביאה לידי ביטוי רמה אוריינית גבוהה לפחות באחד מהתהליכים: ניסוח, יישום או פירוש, התבצע עדכון לשאלה לצורך העלאת רמת האוריינות. דוגמה לניתוח אורייני של אחת השאלות מהמשימה בנושא של גידול ודעיכה מוצגת להלן ב**איור 1**.

איור 1

משימה מעודדת אוריינות מתמטית מתוך המשימה בנושא של גידול ודעיכה



השאלה המוצגת מדגימה רמה אוריינית גבוהה, בהתייחס לשלושת התהליכים: בהתייחס **לניסוח**, השאלה מצריכה עבודה עם רעיונות חדשים, הבנת המשמעות של הכדאיות, ובניית מודל מתמטי לבדיקתה. עבור השאלה הזאת התלמידים יכולים לנסח מודלים מתמטיים שונים לכדאיות ולקבל תשובות שונות, לכן במרכיב הניסוח השאלה נמצאת ברמה גבוהה. בהתייחס **ליישום**, השאלה מצריכה בניית אסטרטגיות פתרון והערכתן, על פי הפירוש של התלמיד ל"כדאיות". התלמיד צריך לתכנן אסטרטגיה מתאימה, כך שבהתייחס למרכיב היישום השאלה נמצאת ברמה גבוהה. בהתייחס **לפירוש**, השאלה מצריכה יכולת ניסוח והסבר למידת ההתאמה בין הממצאים למצב המקורי במיוחד בסעיף ב' וג' שבהם התלמידים צריכים לפרש את המשמעויות השונות של הגרפים המתקבלים. לכן במרכיב הפירוש השאלה נמצאת ברמה גבוהה.

דיון

המחקר הנוכחי מציג תהליך שיתופי בין בעלי עניין שונים לצורך בנייה של שאלות מתמטיות מעודדות אוריינות מתמטית שמותאמות לתוכנית הלימודים, תוך שמירה מרבית על ההקשר המדעי־הנדסי של הבעיות, בנוסף לכלי ששימש ככלי הערכה מעצבת בתהליך הפיתוח. בכך, המחקר תורם להבנה התיאורטית של הקשר בין בעיות מתמטיות אותנטיות, בהקשר מדעי־הנדסי, לרמת אוריינות מתמטית גבוהה (Kaiser, et al., 2011; Van der Wal, Bakker, & Drijvers, 2017).

מבחינה מתודולוגית, המחקר מציג כלי הערכה חדשני – מחוון להערכת רמת אוריינות מתמטית – אשר מאפשר לאפיין ולסווג בעיות מתמטיות בעלות אופי אורייני. לבסוף, מבחינה פרקטית, המחקר תורם לשיקוף היישומיות והרלוונטיות של המתמטיקה לחיי היומיום של תלמידים, ובפרט לשימושי המתמטיקה בתחומי המדעים וההנדסה, כפי שהם משתקפים בפיתוחים טכנולוגיים שונים, תוך שימוש בבעיות אותנטיות "אמיתיות." התאמת התכנים לתכנית הלימודים הפורמלית של בתי הספר העל־יסודיים מגבירה את היתכנותם של בעיות אלה להשתלב במערכת החינוך עבור מורים אשר שואפים לקידום רמת האוריינות המתמטית של תלמידיהם, כמו גם כדי לעניין ולהניע אותם ללמוד מתמטיקה.

רשימת מקורות

Ahram, T., Sargolzaei, A., Sargolzaei, S., Daniels, J., & Amaba, B. (2017, June). Blockchain technology innovations. In *2017 IEEE technology & engineering management conference (TEMSCON)* (pp. 137-141). IEEE.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects—State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68.

De Lange, J. (2006). Mathematical literacy for living from OECD-PISA perspective. Retrieved from Citeseer.

Foroglou, G., & Tsilidou, A. L. (2015, May). Further applications of the blockchain. In *12th student conference on managerial science and technology* (pp. 1-8).

Kaiser, G. (2017). The teaching and learning of mathematical modeling. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 267–291). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.`

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo Ferri, R., & Stillman, G. (Eds.). (2011). *Trends in teaching and learning of mathematical modelling*. New York: Springer.

Kosba, A., Miller, A., Shi, E., Wen, Z., & Papamanthou, C. (2016, May). Hawk: The blockchain model of cryptography and privacy-preserving smart contracts. In *2016 IEEE symposium on security and privacy (SP)* (pp. 839-858). IEEE.

Mettler, M. (2016, September). Blockchain technology in healthcare: The revolution starts here. In *2016 IEEE 18th international conference on e-health networking, applications and services (Healthcom)* (pp. 1-3). IEEE.

Nakamoto, S. (2008). Bitcoin: A peer-to-peer electronic cash system (2008). Retrieved from https://bitcoin. org/bitcoin. pdf.

Niranjanamurthy, M., Nithya, B. N., & Jagannatha, S. (2019). Analysis of Blockchain technology: pros, cons and SWOT. *Cluster Computing*, *22*(6), 14743-14757.

OECD (2018), PISA 2021 mathematics framework (first draft). OECD. Retrieved from https://www.upc.smm.lt/naujienos/smm/penkiolikmeciu-matematinis-rastingumas/GB-

2018-4-PISA-2021-Mathematics-Framework-First-Draft.pdf

Stacey, K., & Turner, R. (2014). *Assessing mathematical literacy*. Springer international publishing AG.

Steen, L. A., Turner, R., & Burkhardt, H. (2007). Developing mathematical literacy. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 285-294). Springer, Boston, MA.

Van der Wal, N. J., Bakker, A., & Drijvers, P. (2017). Which techno-mathematical literacies are essential for future engineers?. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*(1), 87-104.

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2020). Word problems in mathematics education: a survey. *ZDM*, 1-16.

אמונות של מורה לגבי הוראת מתמטיקה לתלמידים מתקשים בחטיבה העליונה: חקר מקרה

צילה ירחי, רוני קרסנטי, אברהם הרכבי

מכון ויצמן למדע

מבוא ורקע תיאורטי

לימודי המתמטיקה בחטיבה העליונה נחשבים לאתגר ומהווים מחסום בפני תלמידים רבים שאין להם נטייה למתמטיקה. בתקציר זה נתייחס למורים המלמדים תלמידים בעלי קושי מתמשך בלימודי המתמטיקה שבהיעדר הוראה מותאמת, אינם מצליחים להגיע לתוצאות טובות במהלך הלימודים ומתקשים לעבור את בחינת הבגרות ברמת שלוש יחידות לימוד במתמטיקה. הסיבות לאי־ההצלחה בלימודי המתמטיקה קשורות בחלקן למאפיינים קוגניטיביים, רגשיים והתנהגותיים של התלמידים (Chazan, 2000; קרסנטי והרכבי, 2003). ישנן גישות להוראת מתמטיקה המביאות בחשבון מאפיינים אלה ומעודדות למידה של תלמידים מתקשים מתוך הבנה ופיתוח החשיבה, במטרה לחבר את התלמידים להיגיון העומד מאחורי הנושאים הנלמדים ולפתח אצלם זהות של לומדי מתמטיקה. לצורך הנחלת גישות הוראה אלו פותחו חומרי למידה כמו, למשל, תכנית ש"י (**ש**לוש **י**חידות) של מכון ויצמן למדע ועוצבו תכניות של פיתוח מקצועי למורים, למשל תכנית של"ב (שיפור למידה במתמטיקה) של מכון דוידסון לחינוך מדעי (Karsenty, 2018).

מורים לתלמידים מתקשים הנוקטים בגישות הוראה המבוססות על שינון ותרגול של כלים פורמליים ופרוצדורות, תוך התייחסות מועטה להבנת ההיגיון מאחורי הכלים הללו, עשויים להנציח את היחס השלילי של תלמידים כלפי מתמטיקה (Zevenbergen, 2003). גם העובדה כי חלק גדול מן המורים המופנים ללמד בקבוצות החלשות הם מורים חדשים עם ניסיון מועט בהוראה, ולעתים אף לא הוכשרו כלל להוראת מתמטיקה (קרסנטי ובן-דוד קוליקנט, 2014), אינה מיטיבה עם התלמידים.

בנוסף, סקר שערכנו לאחרונה במכללות ובאוניברסיטאות בארץ מראה שבמסגרת המסלולים להכשרת מורים למתמטיקה יש התייחסות מוגבלת, אם בכלל, להוראה המכוונת לאוכלוסיות מתקשות, וכתוצאה מכך מרבית בוגרי המסלולים האלה הם חסרי הכשרה מתאימה להוראת מתמטיקה בהקבצות נמוכות.

המחקר המוצג כאן מתמקד במורה שנחשף בראשית דרכו לגישות ממוקדות־הבנה להוראת תלמידים מתקשים במתמטיקה ובחר ללמד בגישות אלו. המחקר מתמקד באמונות המיוחסות למורה (Speer, 2005), בהתמודדויות שיש לו בבואו ליישם אמונות אלו ובכלים שמסייעים לו בהתמודדויות השונות.

מבין שאלות המחקר שהוצבו, נתמקד במאמר זה בשאלה הבאה: מה מאפיין את האמונות של מורה למתמטיקה המלמד תלמידים מתקשים בתיכון, כאשר הוא מנסה ללמד באופן שונה מהמקובל?

מתודולוגיה

<u>שדה המחקר</u>: בשנת הלימודים תשע"ה התקיים במחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן הקורס "עוברים שלב לעדשה" (שם הקורס כלל בתוכו את השמות של תכנית של"ב – שיפור למידה במתמטיקה, ושל פרויקט עדש"ה – עמיתים דנים בשיעורי המתמטיקה) שיועד לפיתוח מקצועי של מורי מתמטיקה בוגרי תכנית 'חותם' המלמדים מתמטיקה לקראת בגרות ברמת שלוש יחידות. בקורס צפו המורים צפייה מונחית בשיעורי מתמטיקה שהוסרטו בכיתות של אחדים מהם, ניתחו אותם ודנו בסוגיות הקשורות בהוראת מתמטיקה לתלמידים מתקשים. במהלך הקורס נחשפו המורים לגישות הוראה המעודדות הבנה ואינטואיציה וממעטות את הצורך בהישענות על נוסחאות פורמליות.

<u>אוכלוסיית המחקר</u>: המחקר הוגדר כחקר מקרה והתמקד במורה אסף (שם בדוי), אחד ממשתתפי הקורס, שהיה בתחילת הקורס בעל ארבע שנות ותק בהוראה ולימד בכיתות של תלמידים מתקשים. כחלק מהשתתפותו בקורס, צולם שיעור של אסף כשהוא מלמד בכיתה י"א מב"ר שיעור פתיחה לנושא "בעיות גדילה ודעיכה". המשתתפים צפו ודנו בשיעור מוסרט זה במסגרת הקורס. אחת הסיבות לבחירה באסף היא שהוא חשף את עמדותיו והתבטא באופן פתוח, ברור ורפלקטיבי במהלך הקורס, וכן שמאז אותה שנה הוא ממשיך ללמד בכיתות של תלמידים מתקשים (אם כי לא רק בכיתות אלה).

<u>איסוף הנתונים</u> – נתוני המחקר נאספו מהמקורות הבאים: (1) השיעור המוסרט שלימד אסף, שהוזכר לעיל; (2) חמשת מפגשי הקורס "עוברים שלב לעדשה" ובכללם המפגש השלישי, בו נותח השיעור המוסרט של אסף; (3) שני ראיונות מבוססי־וידיאו (Speer, 2005) שהתקיימו כארבע שנים לאחר סיום הקורס. בראיון הראשון (IA – Interview A) צפינו עם אסף בשיעור המוסרט שלימד בכיתה י"א ובראיון השני (IB – Interview B) צפינו איתו בקטעים מתוך המפגש השלישי בקורס. בשני הראיונות, התבקש אסף לעצור את ההקרנה ברגעים שבהם הרגיש צורך בכך, להעיר ולהסביר כרצונו.

<u>ניתוח הנתונים</u> – תמלולי שני הראיונות נותחו בעזרת כלים של תיאוריה מעוגנת בשדה בעוד המקורות הנוספים (השיעור המוסרט ומפגשי הקורס) שימשו לטריאנגולציה של המידע. בניתוח הנתונים אופיינו האמונות של אסף על פי שלושה ממדים: (1) קוגניטיבי; (2) אַפקטיבי; ו־(3) פדגוגי.

ממצאים עיקריים

מניתוח הממצאים עולה תפישת העולם המורכבת של אסף, המתבטאת בדרישה שלו מעצמו לשמור על איזונים כמורה ועומדת מאחורי החלטותיו הן לגבי תהליכים הקשורים בתכנון השיעורים, הן לגבי אירועים שמתרחשים בשיעור עצמו והן לגבי קשרים עם תלמידים ועם מורים מחוץ לכיתה. גישת ההוראה שאסף נוקט בה היא קונסטרוקטיביסטית, גישה שלפי הספרות (למשל, Arcavi & Schoenfeld, 1992) היא מורכבת ליישום, ומציבה דרישה גבוהה מהמורה, במיוחד כאשר מדובר על כיתה של תלמידים מתקשים.

(1) הממד הקוגניטיבי

האמונות של אסף לגבי הממד הקוגניטיבי של הוראת מתמטיקה לתלמידים מתקשים עולות בקנה אחד עם חלק מן העקרונות המופיעים בספרות המחקרית (קרסנטי והרכבי, 2003) והן מתייחסות למענה שיש לתת לדעתו למאפיינים קוגניטיביים של תלמידים מתקשים, כגון: בעיית זיכרון, רקע

אריתמטי חלש וקושי בהישענות על נוסחאות וסמלים מופשטים. להלן אפיונים של אמונות שזוהו בנתונים, יחד עם דוגמאות מתוך הראיונות:

- גישת ההוראה צריכה להביא בחשבון ששינון של נוסחאות ופרוצדורות אינו מתאים לתלמידים ולכן יש לחזק אצלם את הבנת התכנים הנלמדים באמצעות פנייה להיגיון ולאינטואיציה: *"והילדים האלה [...] אם הם מבינים מה הם עושים אז הרבה יותר קל להם גם לזכור את הדברים האלה אחר כך"* [IB 150].
- לאחר ביסוס הבנה, אפשר להתקדם עם התלמידים גם לכלים פורמליים שיאפשרו פתרונות יעילים יותר. יחד עם זאת, קיימים תלמידים שיתכן שתהליך זה לא ימומש עבורם, ואז על המורה לתת להם לגיטימציה להמשיך להשתמש באסטרטגיות לא פורמליות: *"המטרה בסופו של דבר שתלמיד [...] יתקדם לשיטות שכן, יותר יעילות. זאת המטרה, עכשיו תלמיד שמתקשה ולא מגיע לנקודה הזאת אז אין מה לעשות, מה האלטרנטיבה? שהוא ינסה ולא יצליח בשיטה אחרת"?* [IB 109]. על המורה להנחות כל תלמיד באיזו מידה להתקדם מן הלא פורמלי אל הפורמלי בהתאם ליכולותיו ובשלותו כפי שהמורה מזהה אותן.
- מתוך שני האפיונים הראשונים נובעת אחריות המורה לבחירת נושאים שיאפשרו הבנה טובה של החומר. כמו, למשל, גיאומטריה אנליטית: *"בקו ישר, במערכת צירים, יש טונות של היגיון, [...] זה היגיון הכי פשוט שיש. תזוזות ימינה שמאלה, תזוזות למעלה למטה"* [IA 267].
- בנוסף להיגיון ולאינטואיציה המתמטית שיש לבנות בקרב תלמידים מתקשים, יש לעודד קישור לעולם המציאותי: *"נתתי לו הסבר מספרי שכופלים בשבר, ויש כאילו, היגיון מאחורי זה [...] היגיון מציאותי שמכונית, הערך שלה יורד עם השנים"* [IA 253-255].

מניתוח השיעור "בעיות גדילה ודעיכה" שלימד אסף, נראה כי האמונות הללו שביטא בזמן קיום הראיונות תאמו את הפרקטיקות הנצפות בהן נקט במהלך השיעור (למשל, האופן בו הסביר מהו גידול מעריכי וכיצד לפתור בעיה על סמך הבנת החוקיות של התהליך וללא שימוש בנוסחה).

(2) הממד האַפקטיבי

האמונות של אסף לגבי הממד האַפקטיבי בהוראת מתמטיקה לתלמידים מתקשים מתיישבות עם מאפיינים רגשיים של תלמידים מתקשים המוזכרים בספרות המחקרית (קרסנטי והרכבי,2003): ביטחון עצמי נמוך, סף תסכול נמוך, קושי לעבוד ללא תשומת לב וצורך במשוב מידי. להלן אפיונים של אמונות שקשורות לממד זה וזוהו בממצאים:

- חיבור רגשי טוב עם תלמידים וקשר טוב עמם הוא הכרחי לצורך קידומם. התמיכה הרגשית בתלמידים היא חלק מתפקיד המורה: *"יש הרבה מקום של הכלה [...] כמה שהם יותר חלשים יש לי יותר סבלנות אליהם"* [IB 59]. החיבור והתמיכה מאפשרים ללמד את התלמידים ביעילות רבה יותר: *"בגלל שאני מתחבר איתם מאוד, אז הלמידה מאוד איכותית אצלי [...] פיקסתי אותם יותר זמן, הצלחתי להגיע אותם ללמידה יותר דקות"* [IB 138].
- לתהליך הלמידה, בנוסף לתוצרים של הבנת החומר וציונים במבחנים, ישנם תוצרים רגשיים רצויים כמו ביטחון עצמי ותחושת מסוגלות: *"תלמיד שפתאום מצליח [...] אז יש לו מוטיבציה, יש לו רצון ללמוד כבר [...] אנחנו עושים פה, בסופו של דבר, עבודה שהציון הוא לא מהות הכל"* [IB 113].

אסף הצביע על כך שמסגרות התומכות במורים של תלמידים מתקשים (כגון, אגף שח"ר במשרד החינוך) שמות דגש רב על קידום התלמידים דרך חיזוקים רגשיים ומתן מוטיבציה חיצונית. עם זאת, בעיניו חשוב לחזק גם את הממד הקוגניטיבי ואת המוטיבציה הפנימית של התלמידים.

(3) הממד הפדגוגי

ממד זה כולל אמונות המתייחסות לתפקיד המורה ביצירת מעורבות בקרב התלמידים על ידי הפעלה שלהם והצבת אתגרים שבהם הם מסוגלים לעמוד. בממד זה ישנה התייחסות גם לפן הקוגניטיבי וגם לפן האפקטיבי והוא משמש כגשר ביניהם. אמונותיו של אסף לגבי הממד הפדגוגי נמצאות גם הן בהלימה עם עקרונות הוראה שהוצגו בספרות המחקרית (קרסנטי והרכבי, 2003) והן מתייחסות למאפיינים התנהגותיים של תלמידים מתקשים כמו חוסר אקטיביות בדיונים בכיתה והימנעות מכתיבה בכיתה ומהכנת שיעורי בית. להלן אפיונים של אמונות של אסף הקשורות לממד הפדגוגי:

- תפקיד המורה להפעיל את התלמידים על ידי כך שיצמצם את ההסברים שלו בכיתה ויעודד את התלמידים להיות שותפים. פתיחת השיעור היא נקודת זמן קריטית לגבי גיוס התלמידים ללמידה ולכן חשוב שהיא תכלול משימה או תרגיל שיזמין את התלמידים לעשייה: *"אני מתחיל את השיעור וכבר מהשנייה הראשונה הם משתעממים. אני על, כאילו, זמן קצוב להשאיר אותם בערנות* [...] *היתה לי כבר את ההבנה שאני צריך להפעיל את התלמידים כמה שיותר, שהתלמידים צריכים להגיע לדברים. שאני צריך* [...] *להיות יותר בתור מורה־דרך ופחות בתור מרצה"* [IA 176].
- התלמידים המתקשים מסוגלים להתמודד עם תרגילים חדשים גם אם לא הציגו בפניהם דרכים לפתרון והמורה אחראי לשקף להם את יכולתם על ידי הצבת אתגרים בפניהם:*"אני לא אוהב לתת לתלמידים תרגיל, עושים על הלוח ואז תעתיק של אותו תרגיל לעשות במחברת* [...] *יש בזה משהו גם קצת לא מכבד. אני לא רוצה להתבטא בחריפות אבל זה לא קופים* [...] *הם לא צריכים להעתיק בדיוק מה שאני עושה"* [IB 245].
- על המורה להכיר את תלמידיו, להקשיב להם ולזהות מה רמת האתגר הנדרשת לצורך הגברת תחושת המסוגלות שלהם בלי לפגוע בה: *"יהיו את האלה שיתייאשו תוך שנייה, אז צריך גם פה לדעת איזונים* [...]*אם אני רואה [שהם לא מצליחים] אז להגיד 'בואו ננסה ביחד על הלוח' ולשאול אותם 'מה אתה חושב? מה את חושבת?"* [IA 178].

מהדוגמאות לעיל עולה, שהממד הפדגוגי מציב בפני אסף קושי ביישום של חלק מן האמונות הקשורות בממדים האחרים, ומחייב אותו למצוא את האיזונים המתאימים. יצוין כי ההסתייגויות שביטא אסף בראיון לגבי הפרקטיקות שבהן נקט בשיעור המצולם היו קשורות כולן לממד זה.

דיון

בניתוח המקרה של אסף נמצאו אפיונים שונים של אמונות, המרכיבות את תפישת העולם שלו לגבי הוראת תלמידים מתקשים במתמטיקה. התמודדויות והתלבטויות רבות של אסף קשורות דווקא לממד הפדגוגי: הצבת אתגרים בפני התלמידים חשובה לדעתו, אך היא חייבת להיעשות תוך התאמת הקושי למצב הקוגניטיבי והרגשי בו התלמידים שרויים. במילים אחרות,הגישה הפדגוגית בה נוקט אסף דורשת ממנו באופן תמידי "לקרוא את המפה" ולאזן בין הצורך של התלמידים ללמוד מתוך הבנה ובין היכולת והמוטיבציה שלהם להתמודד עם משימות לא טריוויאליות. פרשנות זו מתיישבת עם

דבריו של אסף, המבקש לדבריו "להיות יותר בתור מורה־דרך, ופחות בתור מרצה". כשם שמורה־דרך צריך להכיר היטב את הנופים, את המהמורות ואת הדרכים החלופיות, מורה למתמטיקה בכיתות של תלמידים מתקשים צריך לדעת היטב את המתמטיקה, להכיר את הקשיים שהיא מציבה ושיטות חלופיות שיוכל להציע לתלמידיו. בהמשך לאותה מטאפורה, על המורה לזהות את המאפיינים והצרכים של אלה שאותם הוא מוביל, להיות קשוב כל הזמן למצבם ולזהות את הדרך המתאימה להם בכל שלב של המסע.

ממצאי המחקר מוסיפים לגוף הידע המצטבר על הוראת תלמידים מתקשים במתמטיקה ועל האתגרים שיש למורי מתמטיקה בכיתות המוגדרות "חלשות" (למשל: Chazan, 2000; Kajander, & ZukeWalton, 2008). מסגרת הניתוח בת שלושת הממדים שהוצגה עשויה להועיל גם במחקר נוסף, למשל כזה המתמקד בניתוח סיטואציות המתרחשות בשיעורים של תלמידים מתקשים. כמו כן, לממצאי המחקר, ולמסגרת הניתוח בפרט, יש פוטנציאל להשלכות מעשיות לגבי הכשרת פרחי הוראה, תמיכה במורים ופיתוח מקצועי של מורים המלמדים אוכלוסיות של תלמידים מתקשים. למשל, ישנן עדויות לכך שמכשירי מורים יכולים לפתח שיח רפלקטיבי בקרב פרחי הוראה באמצעות צפייה בשיעורי ם (רותם, 2017), וממצאי מחקר זה מעמידים לרשותם כלי לניתוח האמונות של מורים לתלמידים מתקשים, המתבטאות במהלכי הוראה נצפים. לאור החוסר הקיים בהכשרת פרחי הוראה בתחום הוראת תלמידים מתקשים, יש במחקר זה אפוא משום תרומה אפשרית.

רשימת מקורות

קרסנטי, ר', ובן דוד-קוליקנט, י' (2014). מימוש הפוטנציאל האקדמי של כלל התלמידים. בתוך א' הרכבי ונ' מנדל לוי (עורכים), *חינוך לכול ולכל אחד במערכת החינוך בישראל*, 73-97. ירושלים: האקדמיה הלאומית הישראלית למדעים.

קרסנטי, ר', והרכבי, א' (2003). *איפיוני למידה וחשיבה של תלמידים "חלשים" במתמטיקה: דו"ח מסכם לשנים 2000-2002*. מוגש למשרד החינוך.

רותם, ס' (2017). *ממורה מנוסה למתמטיקה למנחה בהכשרת מורים: חקר מקרה של מנחה בסדנאות מבוססות וידאו בהכשרת פרחי הוראה.* (חיבור לשם קבלת תואר מוסמך), מכון ויצמן למדע, רחובות.

Arcavi, A., & Schoenfeld, A. H. (1992). Mathematics tutoring through a constructivist lens: The challenges of sense-making. The Journal of Mathematical Behavior, *11*(4), 321-335.

Chazan, D. (2000). *Beyond Formulas in Mathematics and Teaching: Dynamics of the High School Algebra Classroom*. New York: Teachers College Press.

Kajander, A., Zuke, C., & Walton, G. (2008). Teaching unheard voices: Students at-risk in mathematics. *Canadian Journal of Education*, *31*(4), 1039-1064.

Karsenty, R. (2018). A reformed mathematics curriculum for low-track students in Israel: What lessons can be learned? In Y. Shimizu & R. Vithal (Eds.), *School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities: Proceedings of the Twenty-fourth ICMI Study* (pp. 365-372). Tsukuba, Japan: University of Tsukuba.

Speer, N. M. (2005). Issues of methods and theory in the study of mathematics teachers' professed and attributed beliefs. *Educational studies in mathematics*, *58*(3), 361-391.

Zevenbergen, R. (2003). Ability grouping in mathematics classrooms: A Bourdieuian analysis. *For the Learning of Mathematics*, *23*(3), 5-10.

רמות חשיבה בבחינות בגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל

<u>בועז זילברמן</u>[1], **אלי קלינברגר**[2]

[1] מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית; [2] סימונטיקס

מבוא

בשנת 2007 הכריז משרד החינוך על מדיניות "האופק הפדגוגי", במטרה להדגיש את פיתוח רמות חשיבה גבוהות בתהליך ההוראה והלמידה (זוהר, 2007; משרד החינוך, 2008). במסגרת המדיניות החדשה נידון פיתוח בחינות ברוח החינוך לחשיבה – החל בבחינות המיצ"ב בבית הספר היסודי (משרד החינוך, 2009) וכלה בבחינות הבגרות במתמטיקה (זוהר, 2010). עבור המיצ"ב במתמטיקה נבחרה הטקסונומיה הנשענת על עבודתו של שמואל אביטל (Avital & Shettleworth, 1968) ועל הגדרות רמות החשיבה במבחני TIMSS (משרד החינוך, 2009, עמ' 178).

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר שבחן האם קידום מצוינות במערכת החינוך יכול לתרום להצלחה של תלמידים במבחני הבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל. כחלק מהמחקר נערכו ראיונות עם הפיקוח על הוראת המתמטיקה במשרד החינוך על מנת להבין באיזו הגדרה של רמות חשיבה מתמטית נעשה שימוש בפיתוח בחינות הבגרות. בראיונות עלתה מסגרת מושגית בת חמש רמות:

1. **ידע וזיהוי**: הכרת החומר בצורה שבה נלמד, שליפה מהזכרון ושיחזור מילולי.
2. **חשיבה תהליכית בסיסית**: שימוש באלגוריתם פשוט, מעבר בין ייצוגים.
3. **חשיבה תהליכית מורכבת**: הכללה מורכבת, מרחק גדול בין הפתרון לנתוני הבעיה.
4. **חיפוש פתוח בסיסי**: תובנה פשוטה, חוש למבנה, לא קיים אלגוריתם ברור לפתרון מלא.
5. **חיפוש פתוח מורכב**: תובנה מורכבת, ניתוח (אנליזה וסינתזה), חקר והנמקה.

אוריינות מתמטית נמצאת במוקד של מבחן פיז"ה (PISA). המסגרת המושגית של מבחני פיזה 2021 מגדירה אוריינות מתמטית בתור היכולת להסיק באופן מתמטי ולפתור בעיות במגוון הקשרים מציאותיים על ידי ניסוח, יישום ופירוש של המתמטיקה. יכולת זו מאפשרת לתאר, להסביר ולחזות תופעות באמצעות מושגים, פרוצדורות, עובדות וכלים (OECD 2019). המסגרת מחלקת את סולם הציונים הרציף במתמטיקה לשש רמות בקיאות מתמטית על פי נקודות חתך (p. 92). כל נקודת חתך מייצגת שינוי איכותני ברמת הידע והאוריינות במתמטיקה של התלמיד/ה:

1. זיהוי, מילוי הוראה ישירה, כתיבת ביטוי אלגברי פשוט, הצבה בביטוי או משוואה פשוטה.
2. הסקה ממקור יחיד, תהליך יחיד וישיר, כתיבת משוואה פשוטה, חישוב פשוט, קריאת נתון.
3. תהליך דו-שלבי, כתיבת משוואה דו-שלבית, השוואת נתונים מגרף.
4. מצב מורכב קונקרטי (כולל הנחות/אילוצים), ניסוח משוואה מורכבת, זיהוי מגמה.
5. מצב מורכב מופשט (כולל הנחות/אילוצים), שימוש בתובנה, הסקה מכמה מקורות מידע.
6. ראייה מערכתית, טיפול במצב חדש ולא רגיל, תובנות עמוקות, תכנון ניסוי/מודל.

במאמר זה נתמקד בניתוח רמות החשיבה והבקיאות המתמטית הנדרשות מתלמידים במבחני הבגרות ובקשר ביניהן לבין הישגי התלמידים בבחינות הבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל. בהתאם, נגזרות שתי שאלות מחקר:

א. מה שכיחות כל רמת חשיבה/בקיאות מתמטית בבגרות במתמטיקה בין 2014–2019?

ב. באיזו מידה מסבירה רמת החשיבה/בקיאות את הישגי התלמידים בבחינות הבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל בין השנים 2014–2019?

שיטה

במחקר הנוכחי התמקדנו בניתוח השאלות אשר נכללו במועדי א' (קיץ) של מבחני הבגרות במתמטיקה ברמת 5 יח"ל (שאלונים 35581,35582) בין השנים 2014–2019. מועדים אלו נבחרו בהתאם למידע הזמין בחדר המחקר של משרד החינוך. מיפוי כל שאלה התבצע ברמת הסעיף ותת-הסעיף, על מנת לייצג בצורה יסודית ככל האפשר את רמות החשיבה שמזמנת כל שאלה. סה"כ נותחו במחקר 355 פריטים (סעיפים ותתי סעיפים, ראה טבלה 1).

טבלה 1

מספר פריטים שנותחו לפי שאלון ולפי מועד של בחינת הבגרות במתמטיקה

שאלון	שנה						
	2014	2015	2016	2017	2018	2019	סה"כ
35581	25	32	33	31	36	47	**204**
35582	18	20	25	32	27	29	**151**
סה"כ	**43**	**52**	**58**	**63**	**63**	**76**	**355**

ניתוח הנתונים

מיפוי הפריטים בשאלונים, על פי רמות החשיבה ורמות הבקיאות, כלל שלושה שלבים:

א. גיבוש קריטריונים מבחינים עבור רמות החשיבה ורמות הבקיאות (ראו פרק המבוא), תוך התייעצות עם מינהלת מדידה והערכה במרכז לטכנולוגיה חינוכית.

ב. ניתוח כל פריט (סעיף/תת-סעיף) על פי: הנושא המתמטי בתכנית הלימודים, מספר המילים (בהקדמה לפריט ובפריט עצמו), רמת אוריינות מתמטית, ורמת חשיבה מתמטית.

ג. חישוב השכיחות של שאלות המערבות כל רמת חשיבה וכל רמת בקיאות. הגדרנו את רמת החשיבה/בקיאות המתמטית בשאלה בתור הרמה הגבוהה ביותר של פריט בשאלה.

ניתוח הישגי התלמידים בבחינות הבגרות במתמטיקה בין השנים 2014-2018 התבצע באמצעות חדר המחקר הוירטואלי של משרד החינוך וכלל שני שלבים:

א. חישוב הציון הממוצע בשאלות לפי רמת החשיבה (משרד החינוך) והבקיאות (פיז"ה).

ב. ניתוח קלסיפיקציה לבדיקת הגורמים המשפיעים ביותר על ההסתברות להשיג ניקוד מלא בשאלה. תוצאות הניתוח מוצגות כעץ החלטות שבו כל פיצול מייצג חלק מן האוכלוסייה

העונה לקריטריון הפיצול. העץ נבנה בעזרת Recursive Partitioning and Regression Tree (חבילת Rpart ב- R). רשימת הגורמים שהוכנסו לניתוח כוללת ארבע קטגוריות:

(1) **מאפייני תלמיד**: מין, השכלת הורים, מספר אחים, סך יחידות לימוד, מקצוע מוגבר.

(2) **מאפייני בית הספר**: עשירון טיפוח, מגזר, מחוז גיאוגרפי, יחידת דיווח, מדד חברתי כלכלי ומדד פריפריאליות של יישוב בית הספר.

(3) **מאפייני השאלה**: שנה, שאלון, מספר שאלות בחלק, מיקום בשאלון, מספר הפריטים בשאלה, מספר המילים בשאלה, נושא, רמת חשיבה (משה"ח), רמת בקיאות (פיז"ה).

(4) **הישגי התלמיד**: הציון הסופי בבחינת הבגרות במתמטיקה (כלומר, הציון המשוקלל של ציון המגן ושל שני שאלוני בחינות הבגרות, כולל מועדי בחינה חוזרים אם היו).

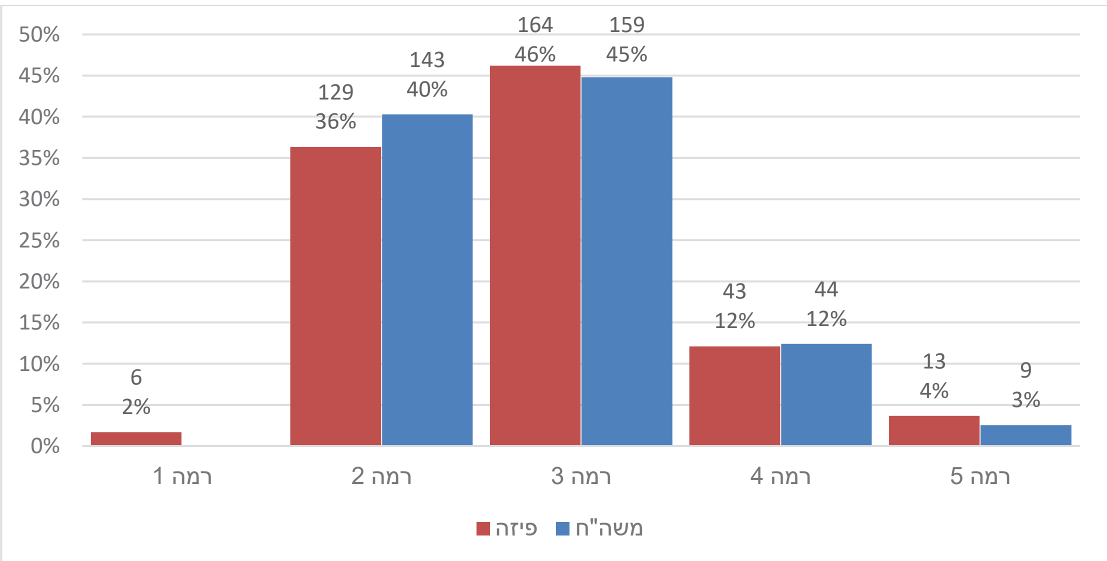
ממצאים

רמות חשיבה ובקיאות

מצאנו התאמה גבוהה בין שתי מסגרות הניתוח מבחינת מספר הפריטים בכל רמת חשיבה/בקיאות – כל הפריטים (מלבד שלושה סעיפים שהופיעו בשאלה ספציפית) דורגו בפער מקסימלי של רמה אחת בין שתי המסגרות. ממצא זה מצביע על קווי דמיון משותפים בין שתי המסגרות. איור 1 מציג את שכיחות הפריטים (סעיפים ותתי-סעיפים) בכל רמת חשיבה/בקיאות. כפי שניתן לראות, לא נמצאו פריטים שסווגו ברמת בקיאות 6 לפי פיז"ה, לצד פריטים בודדים שסווגו ברמת חשיבה/בקיאות 5. שאלות הכילו לכל היותר פריט אחד ברמת החשיבה הגבוהה ביותר, אך בשני מקרים הכילו יותר מפריט אחד ברמת בקיאות 5. שיעור דומה של פריטים היה ברמות חשיבה 2 ו-3 לפי משה"ח, בהלימה עם ההתפלגות התיאורטית של שאלות המערבות חשיבה תהליכית על פי הגדרת הטקסונומיה לבחינת המיצ"ב (משרד החינוך, 2009, עמ' 178). בנוסף, כצפוי לאור רמת הבחינה הגבוהה, פריטים ספורים סווגו ברמת החשיבה/הבקיאות הנמוכה ביותר.

איור 1.

שכיחות הפריטים (סעיפים ותתי-סעיפים) בכל רמת חשיבה/בקיאות.

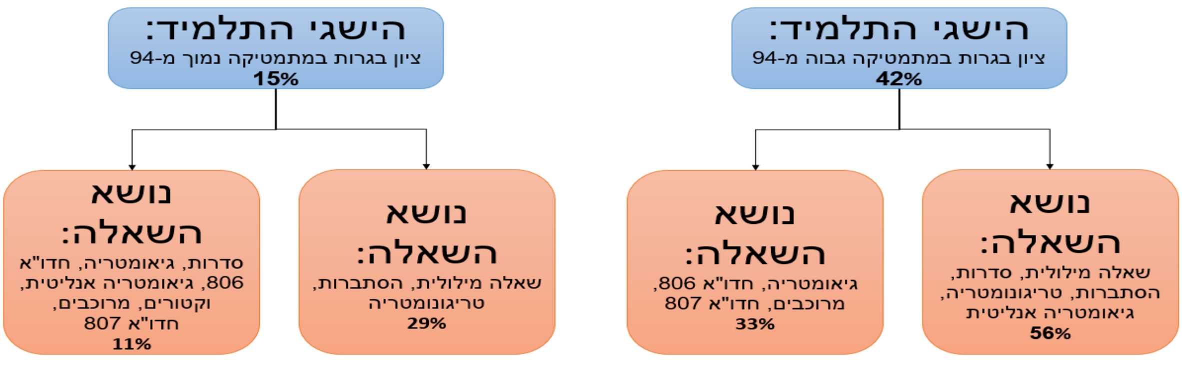


גורמים המשפיעים על הישגי התלמידים בבגרות במתמטיקה

איור 2 מציג את ההסתברות להשיג ניקוד מלא בשאלה כלשהי לפי הגורם המשפיע. הגורם בעל כושר הניבוי הגבוה ביותר היה ציון הבגרות במתמטיקה – כלומר, יכולת גבוהה במתמטיקה משמשת כמנבא מוצלח להסתברות להשיג ניקוד מלא (ולא רק ניקוד גבוה) בבגרות במתמטיקה. הגורם המשמעותי הבא היה נושא השאלה – נבחנים נטו יותר להשיג ניקוד מלא בשאלות מילוליות, בהסתברות, ובטריגונומטריה מאשר בנושאים האחרים.

איור 2

ההסתברות להשיג ניקוד מלא בשאלות בבגרות לפי הגורם המשפיע.



כאשר חזרנו על אותו ניתוח ללא הכנסת ציון הבגרות במתמטיקה לניתוח, הגורם המשמעותי ביותר היה נושא השאלה: בחמישה נושאים (שאלות מילוליות, סדרות, הסתברות, טריגונומטריה ואנליטית) ההסתברות להשגת ניקוד מלא היתה גבוהה יחסית (31%). רק עבור שאלות בנושאים אלו נמצא קשר בין רמת החשיבה לבין ההסתברות להשיג ניקוד מלא: בשאלות שמערבות חשיבה גבוהה ההסתברות היתה נמוכה יותר מאשר בשאלות עם רמת חשיבה נמוכה – 21% לעומת 34%.

לסיכום, התרומה של רמת החשיבה/בקיאות בשאלה לניבוי ההסתברות להשיג ניקוד מלא בשאלה, מעבר ליכולות כלליות במתמטיקה ולנושא השאלה, היתה צנועה מאד. מסקנה אפשרית היא שבמבנה הנוכחי של מבחני הבגרות, השקעה בשיפור ההתמודדות של תלמידים עם שאלות ברמת חשיבה/בקיאות גבוהה לא תשפר משמעותית את הסיכוי שלהם להשיג ניקוד מלא בבגרות.

רשימת מקורות

זוהר, ע. (2007). *"אופק פדגוגי" ללמידה*. המזכירות הפדגוגית, משרד החינוך, ירושלים.

זוהר, ע. (2010). *התחדשות בחינות הבגרות בישראל: רבולוציה או אבולוציה?* עיונים בחינוך 3, 158-174.

משרד החינוך (2008). *חוזר המנהל הכללי – הוראות קבע: התחדשות תהליכי ההוראה, הלמידה וההערכה בבית-הספר העל-יסודי*. חוזר סט/1(א), אלול התשס"ח-ספטמבר 2008.

משרד החינוך (2009). *דו"ח חינוך לחשיבה ("אופק פדגוגי") 2006-2009: תיאור, תובנות והמלצות להמשך*. המזכירות הפדגוגית, ירושלים.

Avital, S. M., and Shettleworth, S. J. (1968). *Objectives for Mathematics Learning: Some Ideas for the Teacher*, Ontario Institute for Studies in Education, Toronto, Canada.

OECD (2019). *PISA 2018 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris, https://doi.org/10.1787/b25efab8-en.

דפוסי ההשתתפות של מנחים חדשים בדיונים שהם מובילים בהשתלמויות למורי מתמטיקה

גיל שורץ, אברהם הרכבי, רוני קרסנטי

מכון ויצמן למדע

רקע ושאלת מחקר

לאחר שנים רבות בהן המחקר על פיתוח מקצועי של מורים למתמטיקה עסק בהפעלה של תוכניות הפיתוח, בלמידת מורים ובהשפעה אפשרית על תלמידים, בשנים האחרונות התפתח המחקר לגבי המנחים של תוכניות אלו, העוסק, בין היתר, בהכשרתם (Lesseig et al., 2016), בניתוח מהלכי ההנחיה שלהם (van Es et al., 2014) ובאפיון האתגרים של מנחים חדשים. אתגר בולט נוגע לניהול דיונים עמוקים (Borko et al., 2014) ולמידה בה על המנחה לכוון את הדיון (Lewis, 2016): בהינתן המרכזיות של דיון בתוכניות עכשוויות לפיתוח מקצועי, אחת המיומנויות הנדרשות ממנחה היא לנווט את הדיון, לנהל אותו ולהעמיקו כך שיביא לחשיפה של מגוון דעות, לשיתוף בפרקטיקות ולשינוי בנקודות המבט של לפחות חלק מהמשתתפים. אחת הסוגיות בתוך הכישורים הכלליים האלה, שטרם נחקרה אמפירית, היא כיצד מנחים חדשים שהם גם מורים ממקמים את עצמם בדיונים אלה, אשר תחום התוכן שלהם הוא הוראת המתמטיקה. השאלה שהמחקר המוצג התמקד בה היא: אילו דפוסים ניתן לאפיין באופן בו מנחים חדשים משתתפים ומביעים את דעתם האישית בדיונים שהם מובילים בהשתלמויות למורי מתמטיקה? האם, וכיצד משתנים דפוסים אלו במהלך שנת ההנחיה הראשונה?

שיטות

שדה המחקר והמשתתפים. המחקר המוצג כאן הוא חלק ממחקר רחב יותר שנערך במסגרת פרויקט עדש"ה (עמיתים דנים בשיעורי המתמטיקה), הפועל במכון ויצמן למדע מאז 2012. במסגרת ההשתלמויות המוצעות בפרויקט, מורים צופים בשיעורי מתמטיקה מוסרטים ודנים בהם עם עמיתים בעזרת מסגרת ניתוח בת שש 'עדשות' המתמקדת בפעולות המורה (Karsenty & Arcavi, 2017), במטרה לפתח כלים לרפלקציה. לצורך הטמעה רחבה של הפרויקט ברחבי הארץ, הוקמה מערכת להכשרה וליווי של מנחים חדשים: נערכו קורסי הכשרה שנתיים (30 ש') למורים מנוסים בוגרי ההשתלמות, ובמהלך שנת ההנחיה הראשונה המנחים קיבלו ליווי אישי מתומכ/ת הנחיה מצוות הפרויקט. הצעה זו מתמקדת בחמישה מנחים חדשים אשר הנחו השתלמות עדש"ה בית-ספרית לצוות המתמטיקה בבית הספר בו הם מלמדים.

איסוף נתונים. במחקר נעשה שימוש בנתונים הבאים: (1) צילומי המפגש השני והמפגש האחרון בהשתלמות של כל מנחה; (2) צילומי ראיונות מבוססי-וידאו אשר נערכו עם כל מנחה לאחר

המפגשים שצולמו, בהם החוקרת (ג"ש) והמנחה צפו ביחד במפגש ההשתלמות והמנחים התבקשו לעצור כשזיהו החלטה שביצעו; (3) יומני הנחיה שהמנחים כתבו לפני ואחרי כל מפגש השתלמות.

סוגיות הנחיה. במטרה להבין את טבעה של הנחיית מורים למתמטיקה ואת הקשיים בכניסה לתפקיד המנחה, ניתוח הנתונים התמקד באיתור של סוגיות הנחיה. בגמרא, סוגיה היא אבן הבניין הבסיסית המרכיבה את הטקסט, אשר מספקת שאלה רבת-פנים ומעניינת, ללא תשובה ברורה מאליה. מטרת הסוגיה היא ליצור דיון בו נקודות מבט שונות יביאו להעשרה ואולי לערעור של השקפות קיימות. באופן דומה, אנו מגדירים **סוגית הנחיה** כשאלה, בעיה, דילמה או תופעה המתרחשת במהלך עבודת המנחה, ומאפשרת מספר התייחסויות שונות, התלויות במידה רבה במשאבים שיש למנחים, במטרותיהם, בהשקפת עולמם ובתפיסת התפקיד שלהם כמנחים.

ניתוח נתונים: (1) **איתור סוגיות הנחיה.** בעזרת צפייה וקריאה חוזרות ונשנות בנתונים אותרו ארבע סוגיות אשר עלו במספר מקרים. בהתאם לשאלת המחקר שהצגנו, נתייחס כאן לאחת מבין הסוגיות הללו, הסוגיה של *כיצד לנהל דיון*, ובתוכה לתת-הסוגיה: *דרכי ההשתתפות של מנחים בדיון, מבחינת הבעת דעה.* (2) **העמקה בסוגיה בעזרת בחינת פרקטיקות אפשריות.** מפגשי ההשתלמות תומללו, וכל החומרים נקראו פעם נוספת כדי לאפיין התייחסויות שונות לסוגיה. שלב זה יצר העמקה בסוגיה והבנת המורכבויות בה, כולל הקשרים בין הפרקטיקה ובין הסיבות להוצאתה לפועל. נציין כי מנחים שונים אשר מבצעים פרקטיקה זהה, עשויים לעשות זאת מסיבות שונות ואף מנוגדות. בנוסף, ייתכן כי מנחים מבצעים פרקטיקות שונות במהלך אותו המפגש. בממצאים שנציג, המנחים סווגו לפי הפרקטיקה הנפוצה ביותר עבורם במפגש. (3) **חיפוש אחר תהליכי התמקצעות של מנחים ביחס לסוגיה בעזרת השוואה בין תחילת השנה וסופה.** בנסיון לאתר ולהבין שינויים בפרקטיקות של מנחים חדשים, חיפשנו מקרים בהם מנחים שינו את התנהגותם, או לחילופין נהגו בצורה זהה אך ציינו סיבות שונות לבחירה זו. ערכנו השוואה בין האופן בו הם מתארים את הפרקטיקות בתחילת השנה ובסופה.

ממצאים: דפוסי השתתפות בדיון

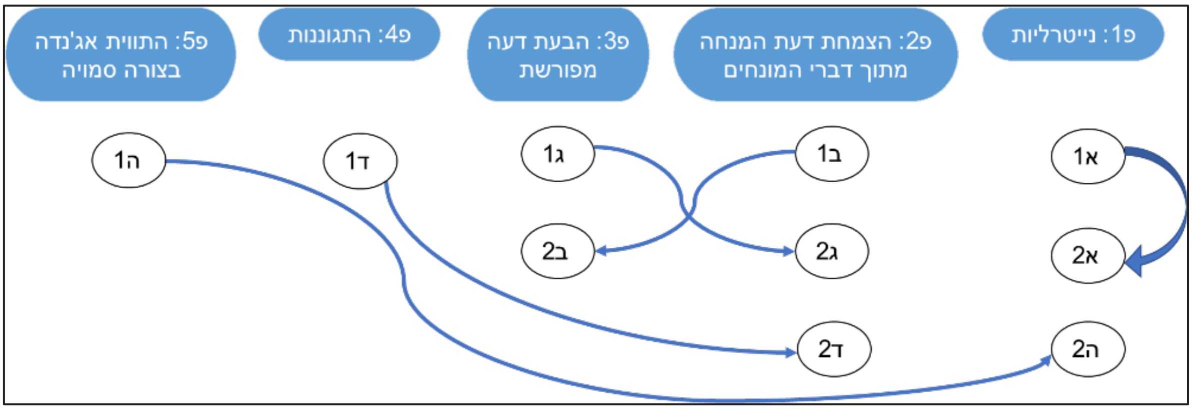
מהות הסוגיה ומרחב האפשרויות. הבדל בולט בין הוראת מתמטיקה בכיתה לבין הנחיית השתלמות למורי מתמטיקה הוא המקום של המורה/מנחה בדיונים והמידה בה יש אפשרות ורצון להביע דעה במהלך דיון. לרוב, בכיתת המתמטיקה מורים נתפשים כסמכות אשר בידה לקבוע אילו אמירות בדיון הן נכונות ואילו לא. תפישה זו נובעת הן מיחסי הכח המובנים בין מורה לתלמידים והן מייחודו של תחום התוכן אשר נתפס ככזה שבו כל אמירה יכולה להיות מסווגת כנכונה או לא (Chazan, Callis & Lehman, 2009). לעומת זאת, בדיונים על הוראת המתמטיקה בהשתלמויות על המנחים להחליט באיזה אופן הם בוחרים להשתתף בדיון, הן משום שיחסי הכח הם שונים והן משום שתחום התוכן הוא הוראת מתמטיקה, ובו יש מקום לגישות שונות אשר לאו דווקא ניתן, או רצוי, להכריע ביניהן. במחקר נמצא מגוון של אפשרויות להתייחס לסוגיית ההשתתפות: ישנם מנחים המתמקדים בתמיכה בדיון ואינם מביעים את דעתם האישית על הסוגיה הנדונה. מנגד, ישנם מנחים הרואים עצמם כחלק בלתי נפרד מקבוצת המשתתפים, שבנוסף לקחו על עצמם את תפקיד ההנחיה. לפיכך, הם מביעים דעה בדיון ככל יתר המשתתפים, או, בצורה סמויה יותר, מעלים לדיון סוגיות שמעניינות אותם כמורים. הנחת היסוד שלנו כחוקרים היא שכל בחירה של מנחה נושאת אג'נדה מסוימת, ואמנם, הבעת דעה

יכולה להתבטא בעקיפין, למשל בבחירת שאלה לדיון. מחקר זה מתמקד בהבעת הדעה **המפורשת** של מנחים בזמן דיון בסוגיות מתמטיות-פדגוגיות בהשתלמויות אותן הם מנחים.

הפרקטיקות. איור 1 מציג את הפרקטיקות שנמצאו בהקשר לסוגיה הנדונה (מסומנות בהמשך כ-פ1, פ2 וכו'), את המנחים שהשתמשו בכל פרקטיקה ואת השינויים שעברו המנחים ביחס לפרקטיקה במהלך השנה. כל אות באיור מתארת את אחד מחמשת המנחים (א-ה) והמספרים "1" ו-"2" מציינים את הפרקטיקות הרווחות של המנחה בתחילת שנת ההנחיה הראשונה ובסופה, בהתאמה.

איור 1

הפרקטיקות שנמצאו



נציג כעת את הפרקטיקות בעזרת דוגמאות. מפאת מגבלת המקום, רוב הציטוטים שנביא לקוחים מתוך הראיונות, אך נדגיש שוב שזיהוי הפרקטיקות ואפיונן התבססו גם על תמלולי מפגשי הנחיה.

פ1: נייטרליות. פרקטיקה זו מאופיינת באי הבעת דעה בדיונים המתבטאת בעיקר בשאילת שאלות, כאשר דרך השאילה לא מרמזת על העמדה המועדפת על המנחה. נייטרליות יכולה לנבוע ממגוון סיבות, למשל, מטעמים אסטרטגיים – כלומר מכך שהמנחה רוצה שהמורים יביעו את דעתם בחופשיות ולא מתוך תגובה לדעתה (ה2), או לחילופין מתפיסה של המנחה שנייטרליות היא **ערך** השזור בתפקיד של מנחה עדש"ה (א1, א2). אימוץ ערך כזה עשוי להעלות קונפליקטים אצל המנחה:

> אני מאוד נגד מה שמורה 1 אמר, לא נכנסתי לעימות [...] אני לא מתכוון להביע את דעתי האישית פה... [...] אני לא בטוח מה התפקיד שלי כמנחה, האם אני משתתף? עצם זה שאני בא ומביא שאלות שמעניינות אותי ומעלה סוגיות שמעניינות אותי. זה הקונפליקט שלי בתוך הצוות, בין מנחה למשתתף.

פ2: הצמחת דעת המנחה מתוך דברי המונחים. חלק מהמנחים מחזיקים בעמדה אותה הם רוצים לקדם בהשתלמות מבלי שתגיע מהם באופן ישיר, ולפיכך הם מנסים להצמיח אותה כחלק אינטגרלי מהדיון. הפרקטיקה עשויה לנבוע מתפיסת הנחיה בעדש"ה כתפקיד בו מומלץ שלא להביע דעה נחרצת בגלוי בדומה למנחה א' לעיל. עם זאת, אין מדובר בנייטרליות, מכיוון שבמקרה זה מנחים השתמשו בפרקטיקות הנחיה של עדש"ה, דהיינו בדיונים המביאים בחשבון רווח והפסד בסיטואציות הוראה, כדי לקדם את דעתם או לערער על דעה נגדית אשר עלתה בדיון, למשל במקרה של ד2 (דגשים הוספו):

> <u>אני לא מסכימה עם מה שהוא אמר</u>. ובכל זאת אמרתי, אוקיי, אז מה בכל זאת היתרון? ואני שמחה שלמדתי את הנקודה העדינה הזאת. אוקיי, אז הוא עשה ככה. אז <u>למה</u> הוא בכל זאת עשה ככה?

פ3: הבעת דעה מפורשת. פרקטיקה זו מאופיינת בהשתתפות של מנחים בדיון כאחד מחברי הצוות אשר מבקשים להביע דעתם ואולי גם להשפיע על דעות אחרים. לפרקטיקה זו יש צידוקים שונים בקרב מנחים שונים. למשל, המנחה ב', אשר בתחילת השנה פעלה לפי פ2, החלה להביע דעתה בצורה מפורשת בעקבות דיון בנושא עם תומכת הנחיה מצוות הפרויקט:

> אני הרגשתי שעם שלוש יחידות, אז המורים שלי הם הסמכות [...] להם יש כבר את הידע שלהם ואת המומחיות שלהם ובאיזשהו מקום אני שם לא, לא מביאה את האג'נדה שלי. ואז, הייתה לי שיחה עם י' [תומכת ההנחיה] והיא כאילו נגיד גרמה לי, היא נגיד כן חשבה ש"מותר" לי להגיד ושכן אולי צריך להביא את הצד הזה לתוך בית הספר.

אצל המנחה ג' לעומת זאת, הבעת הדעה המפורשת בתחילת ההנחיה נבעה מכך שרצתה להשתתף בדיון כמורה, ולא רק כמנחה:

> דיברנו בהשתלמות [קורס המנחים] האם אנחנו צריכים להתערב, האם אנחנו צריכים לומר את דעתנו [...] ואני הגעתי למסקנה כזאת, כשאני שואלת שאלות אני קודם כל רוצה לשמוע אותם. [...] אחר כך אם יש משהו, שהוא... אני חושבת שהוא יכול להוסיף לדיון, ואני כאילו, אני חושבת לעצמי כאילו, אם אני הייתי עכשיו בשולחן, גם הייתי מספרת את הסיפור הזה, [...] אני מרגישה שהנכון הוא לא להימנע מלבטא את עצמי, כי אני "רק מנחה" ואני "רק מקשיבה", אבל מצד שני כמובן, לא להשתלט על הדיון.

פ4: התגוננות. פרקטיקה זו מתרחשת כתגובה לאמירות שיפוטיות של מורים, ומאופיינת בכך שהמנחה בוחרת להגן על עמדתה באופן ישיר. אלטרנטיבות להחלטה זו עשויות להיות נסיון להבין את האמירה השיפוטית, התעלמות, או העלאה לדיון כללי (פ2). במקרה של ד1, השימוש בפרקטיקה נובע מחוסר במשאבים של המרת שיפוטיות לסוגיה לדיון:

> היה לי רצון להגן על מ' [המורה המצולמת], זה, גם אחת הבעיות שלי. במקום להסתכל על זה קצת לא בצורה הצרה הזאת, [...] אלא בצורה רחבה יותר.

פ5: התווית אג'נדה בצורה סמויה. הבעת דעה זו נעשית בצורה אגבית, בשזירה של אמירות נורמטיביות כלפי הוראה בשאלות ההנחיה. בניגוד ל-פ2, אין מטרה של המנחה להצמיח את דעתה מתוך הדיון, אלא להבליע אותה, לדוגמה, באמירה זו מתוך מפגש של מנחה ה' בתחילת השנה:

> כולנו מלמדים אנליזה [...] ואני חושבת שכולנו, אני יכולה להגיד גם על עצמי בודאות [...] יצא לנו ללמד גם [...] בצורה טכנית, בצורה של "ככה זה נגזרת וככה גוזרים וככה מוצאים שיפוע" ו... אם בכלל הזכרנו את המילה שיפוע [...] ואולי... היינו רוצים לעשות משהו אחר ממה שאנחנו עושים היום?

פרקטיקה זו עשויה לנבוע מרצון להביא לשינוי בפרקטיקות של המורים בצוות באמצעות סימון ערכים ברורים, שנובע מכך שמנחה ה' משמשת גם כרכזת הצוות:

> אחת המטרות שלנו היא בעצם לייצר איזושהי שפה, שאני מאוד מאוד מקווה שהיא גם תשפיע בתוך בית הספר. אני לא חושבת שזאת מטרה של עדש"ה, אבל זאת כן מטרה שלי.

דיון

בספרות אודות מנחים, מחקרים רבים עושים שימוש בידע הנצבר על *הוראה* כדי לתאר ולהבין *הנחיה*. השאלה בה עסקנו פה היא שאלה חדשה, אשר מורים למתמטיקה לא נדרשים אליה, ולמיטב ידיעתנו לא נחקרה בעבר. הניתוח מצביע על קיומן של התייחסויות שונות לסוגיה של השתתפות המנחה בדיון, ועל מגוון של סיבות לשוני, ביניהן: תפיסות שונות של תפקיד המנחה וערכים הקשורים אליו (למשל נייטרליות לעומת קידום אג'נדה), חוסר במשאבים לניהול דיון בסוגיה, קבלת רוח גבית מצוות הפרויקט להבעת דעה מסוימת, תפקיד ריכוז צוות אשר משפיע על המטרות ועל אופן שאילת השאלות. נציין, כי הפרקטיקות השונות שנמצאו אינן מעידות על מידת ההתפתחות של מנחה. פרישת הפרקטיקות וההסברים להן נועדו לחשוף פנים שונים של הסוגיה, ולהראות כי פרקטיקה זהה אצל מנחים שונים עשויה לנבוע מסיבות שונות ואף הפוכות. בנוסף, נמצא כי רוב המנחים החדשים שינו את דפוסי ההשתתפות שלהם בדיונים. השינויים, כמו נקודות ההתחלה, היו מגוונים: המנחה ב' עברה מ-פ3 ל-פ2 ואילו המנחה ג' עברה מ-פ2 ל-פ3. אנו טוענים כי שינוי בפרקטיקות, אין בו *כשלעצמו* להצביע על התפתחות בפרקטיקות הנחיה, אך הוא עשוי להעיד על בחירה מודעת יותר.

המחקר נעשה אמנם במסגרת עדש"ה, בה דיונים הם מרכיב מרכזי של כל מפגש השתלמות, אך הניתוח והמסקנות יישימים לכל השתלמות בה יש דיון על סוגיות הוראה. תרומת מחקר זה היא בחשיפת רובד נוסף של מורכבות בניהול דיון עבור מנחים חדשים, המצטרף לאלו המוכרים בספרות (Borko et al., 2014; Lewis, 2016), ובהעלאה לפני השטח של סוגיה שמטרידה מנחים חדשים תוך שיום של פרקטיקות רלוונטיות. עצם הכרת מרחב אפשרויות בסוגיה עשוי לגרום למנחים חדשים לבחור בדרך פעולה מתוך מודעות ולא בצורה ספונטנית, ולמכשירי מנחים לחשוב על עקרונות עיצוב מתאימים תוך שימת לב לסוגיה זו.

מקורות

Borko, H., Koellner, K., & Jacobs, J. (2014). Examining novice teacher leaders' facilitation of professional development. *Journal of Mathematical Behavior, 33,* 149–167.

Chazan, D., Callis, S., & Lehman, M. (2009). *Embracing reason: Egalitarian ideals and the teaching of high school mathematics*. Routledge.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(5), 433–455.

Lesseig, K., Elliott, R., Kazemi, E., Kelley-Petersen, M., Campbell, M., Mumme, J., & Carroll, C. (2017). Leader noticing of facilitation in videocases of mathematics professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(6), 591–619.

Lewis, J. M. (2016). Learning to lead, leading to learn: How facilitators learn to lead lesson study. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 48*(4), 527-540.

van Es, E., Tunney, J., Goldsmith, L. T., & Seago, N. (2014). A framework for the facilitation of teachers' analysis of video. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 340–356.

קידום מורים ככותבי משימות בקהילת חקירה מתמטית של מורים וחוקרים

<u>מירית רחמים</u>[1,2]**, אבי ברמן**[3]**, בוריס קויצ'ו**[4]

[1]מכון מופ"ת; [2]אורנים-מכללה אקדמית לחינוך; [3]טכניון-מכון טכנולוגי לישראל; [4]מכון ויצמן למדע

מבוא

הזדמנויות למידה מתמטיות הן במידה רבה פועל יוצא של המשימות המתמטיות המוצגות לתלמידים בכיתה (Jones & Pepin, 2016; Krainer, 2014; Johnson, Coles, & Clarke, 2017; Zaslavsky, 2008). מכאן שבחירה או ניסוח של משימות מתמטיות איכותיות היא אחת ההחלטות הפדגוגיות החשובות ביותר שמורה צריך לקבל (Crespo, 2003). משימות מעוצבות היטב well-designed task)), הן משימות המעודדות חשיבה ביקורתית ודיונים המקדמים הבניית ידע ויצירת הכללות לגבי מושגים ועקרונות מתמטיים(Swan,2007) . יכולתם של מורים להעריך את אופי ואיכות המשימות שהם מציעים לתלמידיהם קשורה במידה רבה לידע שלהם את עקרונות המשימה המעוצבת היטב (שם). אחת הדרכים להגביר את מודעותם של מורים לעקרונות אלה ולשפר בכך את איכות הלמידה במתמטיקה, היא לעודד את מעורבותם הפעילה בפתרון ועיצוב משימות מתמטיות (Jacobs & Morita, 2002; Kieran, Krainer, & Shaughnessy, 2013; Taylor, 2017). בעשורים האחרונים נעשו ניסיונות רבים ליצור קהילות חקירה(CoI) המורכבות ממורים וחוקרים, שמתמקדות בתכנון משימות היכולות לשפר את למידת המתמטיקה (Goodchild, Fuglestad, & Jaworski, 2013 Jaworski, 2005; Kieran, Krainer, and Shaughnessy, 2013; Koichu & Pinto, 2018; Moss et al., 2015). מחקרים מדווחים על השפעה חיובית שיש לקהילות חקירה אלו על עמדת החקירה של המורים ועל ההבנה העמוקה יותר של התכנים המתמטיים (למשל, (Jaworski, 2005; Moss et al., 2015. עם זאת, רק מספר מועט של מחקרים התמקדו באופן בו ניתן לסייע למורים להפוך להיות מעצבי משימות בכוחות עצמם (Knott et al., 2013). בפועל, במרבית קהילות החקירה המשותפות למורים וחוקרים, החוקרים מופקדים על תכנון או איתור המשימות האיכותיות ואילו המורים מתמקדים בעיקר בהתאמת משימות אלו לתלמידים בכיתות. במחקר הנוכחי ניסינו לתת מענה לפער זה. בהשראת פרויקט קהילות הלמידה(LCM) של ג'וורסקי (Jaworski, 2005), יצרנו קהילת חקירה שמורכבת מארבעה מורים בבית ספר יסודי וחוקרת חינוך מתמטי. בקהילה זו, התמודדו המורים כלומדים עם משימת מיון שעמדה בקריטריונים של משימה מתוכננת היטב, בחנו את עקרונותיה, תכננו ועיצבו יחידות הוראה בגיאומטריה שהתבססו על שגיאות נפוצות, לימדו את היחידות בכיתות ושדרגו אותן בהתאם לתובנות בעקבות הוראתן.

שאלת המחקר

כיצד מורים למתמטיקה בבית ספר יסודי מיישמים עקרונות של משימה איכותית (Well-designed task) בתכנון משימות מתמטיות לתלמידיהם?

שיטה

אוכלוסיית המחקר

קהילת החקירה כללה את החוקרת (המחברת הראשונה) וארבעה מורים בבית ספר יסודי, שלושה שימשו כמחנכים ולימדו מתמטיקה במקביל למקצועות אחרים ומורה מקצועית אחת שלימדה מתמטיקה במספר כתות. שני מורים מתוך הארבעה לימדו מתמטיקה למרות שתחום זה אינו תחום התמחותם.

כלי המחקר

הנתונים למחקר נאספו משלושה מקורות מרכזיים:

1. הקלטות ווידאו של כל עשרת המפגשים של קהילת החקירה, במהלכן תכננו המורים את המשימות בשתי יחידות ההוראה אותן הם בחרו לעצב מחדש (יחסי הכלה במשפחת המרובעים והקשר בין שטח והיקף במלבן). הקלטות אלו היוו את מקור הנתונים המרכזי.

2. ראיון חצי מובנה עם כל אחד מהמורים בסוף התהליך (ארבעה ראיונות בסך הכל).

3. יומן רפלקטיבי של החוקרת.

ניתוח הנתונים

ניתוח הנתונים ופרשנותם נערכו במקביל לאיסוף הנתונים בתהליך רקורסיבי מחזורי של קריאות אינדוקטיביות (Strauss and Corbin, 1990). כל תמלול, לאחר קריאות חוזרות ונשנות, חולק לאירועים על פי נושאים תמטיים. אירועים שבהם היו היבטים של חקירה בודדו. באירועים אלו, חיפשנו ביטויים לעקרונות של משימות מעוצבות היטב (Swan, 2007). במקביל חיפשנו גם קטגוריות שונות שצמחו מתוך הנתונים (Creswell, 2014) . קטגוריות אלו התמקדו בשני היבטים מרכזיים. הראשון, השפעת העקרונות של משימה מתוכננת היטב על תהליך הלמידה של המורים כלומדים בוגרים למשל, "יצירת תובנות חדשות", "הרחבת הידע המתמטי" ו"הבעת מגוון דעות ונקודות מבט". השני, קטגוריות הנוגעות לתפיסת המורים את אופן היישום של משימות אלו בכיתות למשל, "קשיים ביישום משימות מעוצבות בכיתה", "בחינת המצב מנקודת מבטו של התלמיד" ו- "תנאים ליישום משימות מעוצבות".

הראיונות עם המורים נותחו באופן אינדוקטיבי על סמך אותן קטגוריות שעלו מניתוח הנתונים של המפגשים. מחשבות, רשמים, שאלות ותובנות שהתעוררו מתוך יומן החוקרת שימשו כמקור משלים לקטגוריות האנליטיות שעלו בניתוח.

מהימנות הובטחה באמצעות טריאנגולציה בין שלושת המקורות. הניתוח כלל שיפוט עמיתים של המחברים הנוספים שלא היה להם קשר ישיר עם הקבוצה שנחקרה לאורך תהליך המחקר.

ממצאים

התוצר של תהליך הלמידה בקהילת החקירה המשותפת למורים ולחוקרת הניב תכנון של שתי יחידות הוראה. האחת העוסקת ביחסי ההכלה במשפחת המרובעים והשנייה בקשר בין שטח והיקף של מלבן. בהרצאה נתמקד ביחידת ההוראה שעסקה ביחסי ההכלה במשפחת המרובעים. מספר

מרכיבים הובילו להצלחת התהליך. הראשון הוא התמודדות המורים עם משימת מיון שעומדת בקריטריונים של משימה מתוכננת היטב אותה הציגה בפניהם החוקרת.

במשימה נדרשו המורים למיין 26 כרטיסים עליהם רשומות שגיאות נפוצות בגיאומטריה על פי הסיבות לשגיאות. משימה זו, שכללה מספר גרסאות של מיון שהשתכללו עם התקדמות המשימה, הרחיבה את הידע המתמטי של המורים בנושא אותו הם בחרו לחקור ואפשרה להם לחוות את התהליכים הקוגניטיביים והרגשיים המלווים משימה מתוכננת היטב. הרפלקציה על עקרונות המשימה יצרה ידע דידקטי חדש שסיפק את הבסיס הראשוני שדרוש להנעת תהליך העיצוב העצמי של יחידות ההוראה.

נוכחנו לדעת שתהליך עיצוב משימות איכותיות בהובלת המורים הינו ארוך, מורכב ודינמי. התהליך הצריך סיוע ותמיכה של החוקרת בהתאם לצרכים המשתנים של הקבוצה. אחד הצרכים שעלו היה סיוע למורים במציאת משימה שתענה בו זמנית על שני צרכים. הראשון, הצפת השגיאה הנפוצה שנובעת מזיהוי מרובעים באופן בלעדי לאור דוגמאות המייצגות את אב־הטיפוס. קושי שמוביל למסקנות שגויות כגון שמלבן אינו מקבילית; ריבוע אינו מלבן וכו'. השני, משימה שתייצר הזדמנות להבנה טובה יותר של מגוון ההגדרות האפשריות של כל מרובע לאור יחסי ההכלה בינהם.

כדי לסייע למורים, החוקרת הציגה בפניהם משימה שעסקה בהבניית מושג שרירותי ("מילינרק"– צורה מנוקדת שיש לה זנב ונקודה שחורה) באופן קונסטרוקטיביסטי על ידי השוואה של צורות העונות להגדרה וכאלו שאינן עונות עליה. המשימה שעסקה בתוכן שונה אך במהות דומה – הגדרה של מושג, היוותה השראה למשימה שעיצבו המורים לתלמידיהם. המשימה אותה עצבו המורים כללה קבוצות של מרובעים שבכל אחת הוצגו מגוון ייצוגים של מרובעים העונים להגדרת הקבוצה – למשל, בקבוצת המקביליות היו ייצוגים של ריבוע, מלבן, מעוין ואב טיפוס של מקביליות במנחים שונים. התלמידים התבקשו לכתוב את כל התכונות המשותפות לכלל המרובעים בקבוצה. משימה זו זימנה התייחסות הוליסטית לכלל הקשרים בין המרובעים (בשונה מההוראה המתמקדת בכל פעם במאפיינים ובהגדרה של מרובע אחד – לרוב על פי אב הטיפוס הוויזואלי). שוני זה, הוביל את המורים לתכנון שיח מתמטי הממוקד בקשרים ובהגדרות השונות של המרובעים באופן שיכול לקדם הבנה טובה יותר של יחסי ההכלה במשפחת המרובעים.

מסקנות

קהילת חקירה המשלבת מורים וחוקרים המתמקדת בעיצוב משימות איכותיות מחזקת את אמונתם של המורים באשר לתרומת הגילוי העצמי של הלומדים על איכות הלמידה כפי שתיאר אחד המורים: "למדתי עד כמה חשוב הגילוי העצמי של התלמיד... לתת להם ל"הזיע" קצת לפני שמראים להם את ההכללה. זה שינוי מרענן. כשאתה מנתח את הבעיה ומגיע למסקנות שלך, זה גורם לך להיות מעורב יותר בלמידה, להבין טוב יותר ובתקווה גם לזכור את העקרונות לאורך זמן".

תרומתו של המחקר מתמקדת בהרחבת הידע לגבי האופן בו קהילות חקירה המשותפות למורים וחוקרים יכולות לעזור למורים להיות יותר עצמאיים בתכנון משימות מתמטיות איכותיות עבור תלמידיהם. תהליך הלמידה המשותף, המוצג במחקר, מאפשר למורים לחוש בעלות על הידע ומקדם בכך את יכולתם להיות יותר אוטונומיים בבחירה ועיצוב משימות שיכולות לקדם את הוראת המתמטיקה בכיתתם.

רשימת מקורות

Creswell, J. W. (2014). Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches (Fourth ed.) Thousand Oaks: SAGE Publications.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics 52,* 243–270.

Goodchild, S., Fuglestad, A.B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 84,* 393–412. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9489-z

Jacobs, J., & Morita, E. (2002). Japanese and American teachers' evaluations of videotaped mathematics lessons. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(3), 154-175. doi:10.2307/749723

Jaworski, B. (2005). Learning communities in mathematics: creating an inquiry community between teachers and didacticians. *Research in Mathematics Education,* 7 (1),101-119. doi.org/10.1080/14794800008520148

Johnson, H.L., Coles, A., & Clarke, D. (2017). Mathematical tasks and the student: navigating "tensions of intentions" between designers, teachers, and students. *ZDM: Mathematics Education, 49,* 813–822. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0894-0

Jones, K., & Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2), 105–121.

Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. In: M. A. Clements, A. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. Leung (Eds.) *Third International Handbook of Mathematics Education,* Volume B (pp. 361–392). Dordrecht, the Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_12

Knott, L., Olson, J., Adams, A., & Ely, R. (2013). Task design: Supporting teachers to independently create rich tasks. In C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education: Proceedings of ICMI Study 22* (pp. 599–608). Oxford, UK.

Koichu, B., & Pinto, A. (2018). Developing Education Research Competencies in Mathematics Teachers Through TRAIL: Teacher-Researcher Alliance for Investigating Learning. Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology, Published online: 11 April 2018 https://doi.org/10.1007/s42330-018-0006-3

Krainer, K. (2014). Teachers as stakeholders in mathematics education research. *The Mathematics Enthusiast*, *11*(1), 49-60. https://scholarworks.umt.edu/tme/vol11/iss1/4

Moss, J., Hawes, Z., Naqvi, S., & Caswell, B. (2015). Adapting Japanese Lesson Study to enhance the teaching and learning of geometry and spatial reasoning in early years classrooms: A case study. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 47*(3), 377-390. doi:10.1007/s11858-015-0679-2

Strauss, A., & Corbin, J. (1990). Basics of qualitative research: Grounded theory procedures and techniques. Newbury Park, CA: Sage.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, 217-237. doi 10.1007/s10857-007-9038-8

Taylor, L. A. (2017). How teachers become teacher researchers: Narrative as a tool for teacher identity construction. *Teaching and Teacher Education, 61,* 16–25. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.09.008

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. In B. Jaworski, & T. Woods (Eds.), *The Mathematics teacher educator as a developing professional* (Vol. 4, pp. 93-114). (The International Handbook of Mathematics Teacher Education). Sense Publishers.

מתחים כהזדמנויות לפעולות: הפיכת מורי מתמטיקה לחלק מקהילה מקצועית לומדת מבוססת חקר

מירלה וידר[1], מיכל טבח[2], בוריס קויצ'ו[3]

[1]מכון מופ"ת, ושאנן, מכללה אקדמית דתית לחינוך; [2]אוניברסיטת תל אביב, [3]מכון ויצמן למדע

מבוא

לאחרונה הפכו קהילות למידה מבוססות חקר (קלמ"ח) לנפוצות בקרב תכניות פיתוח מקצועי של מורים. מצד אחד, מעורבות המורים במחקר חינוכי יוצרת הזדמנויות לבחון דילמות מקצועיות אותנטיות וליישם את ממצאי המחקר בהקשרים רלוונטיים בכיתה (Ezer, 2009; Taylor, 2017). מצד שני, חוקרים ציינו שוב ושוב כי שיתופי פעולה בין מורים וחוקרים במחקר חינוכי כרוכים באופן בלתי נמנע במתחים. חוקרים אחדים רואים במתחים אלה מכשולים לשיתופי פעולה (Labaree, 2003), ואילו אחרים רואים בהם הזדמנויות חשובות (Taylor, 2017; Kieran, Krainer, & Shaughnessy, 2013). הדיון בסוגייה זו הוא בעיקרו תיאורטי, ומעטות הן העדויות האמפיריות השיטתיות לגבי אופן פעולתן של שותפויות בין מורים לחוקרים (Jaworski et al., 2017). בפרט, כמעט ולא ידוע אילו מתחים מתעוררים בקהילות למידה מקצועיות מבוססות חקר, ולא ברור כיצד יש לטפל במתחים אלה. המחקר שלנו מבקש לטפל בלקונה זו. מטרתו העיקרית של מחקר זה היא לזהות את המתחים המתעוררים בקהילה כזו לאורך שנה אחת ולאפיין את הקשר בין מתחים אלה לבין דפוסי ההשתתפות של המורים בקהילה. מטרה נוספת היא לתעד ולדון בכמה מהדרכים בהן ניתן לטפל אסטרטגית במתחים אלו בקהילה.

מסגרת תיאורטית

במהלך השתתפותם בקלמ"ח, מורים נחשפים לפילוסופיית מחקר וכלים לבחינת סיטואציות כיתתיות מורכבות, אשר מקנים להם הזדמנויות לאסוף נתונים, להסיק מסקנות, וליישם את ממצאי מחקרם בהקשרים הוראתיים רלוונטיים (Taylor, 2017). המורים צפויים להתחיל את שיתוף הפעולה שלהם עם חוקרים חינוכיים כ-"משתתפים היקפיים לגיטימיים" ולהתקדם בעקביות לעבר תפקידים מרכזיים יותר בתפקוד הקהילה (Wenger, 2010). תיאורים תיאורטיים אלו מציירים שותפויות הרמוניות בין מורים לחוקרים, בהן המורים המשתתפים לוקחים בהדרגה תפקידים ואחריות משמעותיים יותר ויותר בקהילה. עם זאת, חוקרים ציינו כי השותפויות בין מורים לחוקרים מתאפיינים לא רק בהרמוניה, אלא גם במתחים ואפילו בקונפליקטים. פסיכולוגים חברתיים טוענים כי מיקומם של משתתפים במרחב הרציף והרב-ממדי של הקהילה נמצא תחת שינוי מתמיד, המעוצב על ידי כוחות הכללה והדרה שונים המונעים מאמונות וערכים חברתיים, מקצועיים ותרבותיים. כוחות אלה באין מן הסתם לידי ביטוי גם במתחים המתעוררים בשיח הקהילתי סביב סוגיות הקשורות באמונות אפיסטמיות, בנטיות חברתיות, ברווחה מקצועית אישית, ועוד. בסקירה שערך לאחרונה חשף זפיני (Zaffini, 2018) כמה מהמתחים שחווים משתתפים בקהילות לומדות, רובם בעלי אופי חברתי-פונקציונאלי, סביב סוגיות כמו חלוקה לא שוויונית של עבודה בקרב משתתפים, חוסר כבוד או הכרה מצד חברים בקהילה, וחוסר זמן או

תמריצים לפעולה. בקלמ"ח, כמו בכל קבוצה חברתית העוסקת במטרה משותפת, המורכבות של מערכות יחסים, ציפיות סותרות ואינטראקציות חברתיות בין המשתתפים עשויות להפיק מתחים דומים.

בנוסף, בקהילות לומדות מבוססות חקר, בהן מורים וחוקרי חינוך משתפים פעולה בחקר ההוראה, נחצים הגבולות שבין הוראה ומחקר חינוכי. אף שהמורים והחוקרים החינוכיים עוסקים במחקר שיתופי באותו תחום ידע, הם צמח בתחומי עיסוק שונים, ופיתחו מבני ידע שונים ואמונות אפיסטמולוגיות שונות לגבי הידע, משמעותו, והאופן בן מוכחת וודאותו. הבדלים אפיסטמיים בין מורים לחוקרים עלולים להוביל למתחים בתהליך הפיכתם של מורים למורים-חוקרים. מתוך מודעות להבדלים אלו, מציע לברי (Labaree, 2003) כי על מנת להיות מעורבים במחקר חינוכי, מורים צריכים לשנות את מכוונותם התרבותיות ולאמץ גישה אנליטית, אינטלקטואלית, אוניברסלית ותיאורטית יותר במקום הגישה הנורמטיבית, אישית, ספציפית וחווייתית, המאפיינת אותם. מורים עשויים לחוש כי הינם פועלים מתוך שליחות מוסרית שמטרתה מיצוי טובת תלמידיהם, אותם הם מבקשים להביא להישגים נורמטיביים מוערכים באמצעות שיפור ההוראה שלהם, פיתוח קשרים אישיים רגישים עם תלמידיהם והתאמת פתרונות לדרישות מיידיות בכיתתם. על מנת לשתף פעולה עם חוקרים על המורים לאמץ נקודת מבט אנליטית יותר, המדגישה קווי דמיון ושוני, ומאפשרת פיתוח תיאוריות מכלילות המבוססות על ראיות מוצקות, כחלק מן המשימה לשיפור החינוך.

מחקר זה עוסק בחוויה האנושית של מורים במהלך תהליך השתלבותם כמשתתפים היקפיים לגיטימיים בקלמ"ח, ובאופן בו עשוי האיזון של מתחים לתרום לשגשוג הקהילה הלומדת. מתוך הנחה שמתח המתעורר בהקשרים השונים שבהם פועלים אנשים בקהילה הינם ביטויים לחוסר איזון רגשי או קוגניטיבי, ציפינו שמתחים שונים יבואו לידי ביטוי גם בדיאלוגים הקהילתיים. מתחים בשיח הקהילתי הוגדרו על ידנו כביטויים לפערים בתקשורת בין משתתפי הקהילה, כמו דעות סותרות, תקשורת לוקה בחסר, או דיבור נוקשה וחסר כבוד, המלווים ברגשות שליליים כמו לחץ, כעס, תסכול, חרדה, חוסר אונים, חוסר שביעות רצון, וחוסר אמון. על מנת להתחקות אחר מנגנוני הפעולות המונעים על ידי מתחים, פנינו אל תיאוריית האיזון של פריץ היידר (Heider, 1958), אשר גובשה ע"י קרנדל ואחרים, והותאמה לתיאוריות פסיכולוגיות הקיימות תוך הדגשת הפוטנציאל העוצמתי שלה להסביר מגוון רחב של תופעות חברתיות-פסיכולוגיות (Crandall, Silvia, N'Gbala, Tsang, & Dawson, 2007).

על פי היידר, אנשים שואפים לשמור על איזון קוגניטיבי ורגשי, המתאפיין בעקביות ובהרמוניה בין העמדות שלהם לבין עמדותיהם של אחרים. מצב של חוסר איזון מהווה אי-נוחות עבור האדם, והמתח הנובע מכך מניע את האדם לפעול להשגת איזון: "*... מתח יתעורר, ואז יופיעו כוחות המבטלים את המתח ...*" (Heider, 1958; p. 207). היידר התייחס לעובדה שאנשים לא חיים בוואקום, ואנשים אחרים מגיבים למעשיהם. הוא קבע כי יחסי גומלין בין שני אנשים נוטים להיות מאוזנים על ידי דמיון הדדי. אם אדם מתייחס באופן חיובי לאדם אחר, סביר להניח, שהאדם השני מחזיר יחס חיובי, בעוד שאם האדם ישנה את יחסו לשלילי במערכת יחסים זו, בסופו של דבר, האדם האחר ישנה גם הוא את יחסו לשלילי. על בסיס הדדיות זו במערכות יחסים, התייחס היידר לאפשרות האיזון בשלשה (הפרט, האחר, והנושא). היידר טען כי במצב של חוסר איזון, עומדות בפני הפרט שלוש אלטרנטיבות לפעולה

על מנת להשיג איזון: או (א) לשנות את אופי האינטראקציה שלו עם האחר, או (ב) לשנות את דעתו שלו לגבי הנושא, או (ג) לשכנע את האחר לשנות את דעתו לגבי הנושא.

עם זאת, איזון מתחים בקבוצה גדולה יותר משלושה אנשים (כמו קלמ"ח) הוא מורכב יותר, בעיקר משום ששיקום האיזון בשלישייה אחת יכול לייצר חוסר איזון בשלישייה אחרת. וואנג וטורנגייט (Wang and Thorngate, 2003) השתמשו בסימולציה ממוחשבת בכדי לחזות את ההשלכות של איזון כל השלשות האפשריות של בקהילה המונה יותר משלושה אנשים. הם הראו כי, ללא קשר לנקודת המוצא שלהם, רוב התצורות בסופו של דבר מגיעות למצב של איזון יציב, המורכב משתי תתי-קבוצות בלבד. במיטוזה חברתית זו, חברים מקושרים על ידי קשרים חיוביים בתוך כל תת-קבוצה, בעוד שקיימים רק קשרים שליליים בין חברים השייכים לתתי-קבוצות מנוגדות. יחד עם זאת, נטען כי מספרי המשתתפים בכל תת-קבוצה עשוי להיות תלוי בשיעור היחסים הלא מעוצבים בקבוצה המקורית.

לאור תאוריית האיזון ההידריאנית, ביקשנו לתת מענה לשתי השאלות הבאות:

1. מה מאפיין את המתחים המתעוררים במהלך שיתוף הפעולה בין מורים וחוקרים בשלבים השונים של המחזור המחקרי שנערך בקהילה מבוססת חקר?
2. כיצד משקפים דפוסי ההשתתפות של מורים בקהילה מבוססת החקר את ניסיונותיהם לאזן את המתחים שהם חווים בקהילה?

מתודולוגיה

המחקר נערך במסגרת קלמ"ח שמנתה 11 מורים למתמטיקה במכון ויצמן למדע במהלך שנת הלימודים 2018-2019. קהילה זו תוכננה על פי מסגרת תיאורטית-ארגונית הנקראת מש"ל (מורים שותפים למחקר). המטרה המוצהרת של מש"ל היא לשלב כוחות בין מורים למתמטיקה לחוקרים בחינוך מתמטי, לחקור במשותף נושאים פדגוגיים אותנטיים המעסיקים מורים למתמטיקה בכיתותיהם, והם בעלי עניין הדדי (Koichu & Pinto, 2018). בקלמ"ח הנחקר, שיתוף הפעולה היה לאורך מחזור מחקרי שלם, החל מגיבוש שאלות המחקר, דרך בנייה והפעלה של כלים לאיסוף נתונים, ועד לניתוח והסקת מסקנות מתוך הנתונים שנאספו. פעילות הקהילה נפרשה על פני עשרה חודשים וכללה 11 מפגשים בני 4 שעות: 9 פנים אל פנים ו-2 מקוונים. הנתונים נאספו מתוך תמלול הקלטות וידאו של מפגשים אלו, כמו גם מתוך תמלול ראיונות אישיים שקוימו עם המשתתפים. התמלילים נסרקו במטרה לזהות מתחים העונים להגדרה שלנו. בהסתמך על הספרות, שקלנו את מקורותיהם האפשריים של המתחים שזוהו, תוך הקפדה שלא להגביל את הניתוח שלנו לשלוש הקטגוריות אלו. בסיום תהליך זה קיבלנו רשימה של קטגוריות ותתי-קטגוריות (ראו פירוט והסברים בטבלה 1).

טבלה 1

קטגוריות ותתי-קטגוריות של מתחים

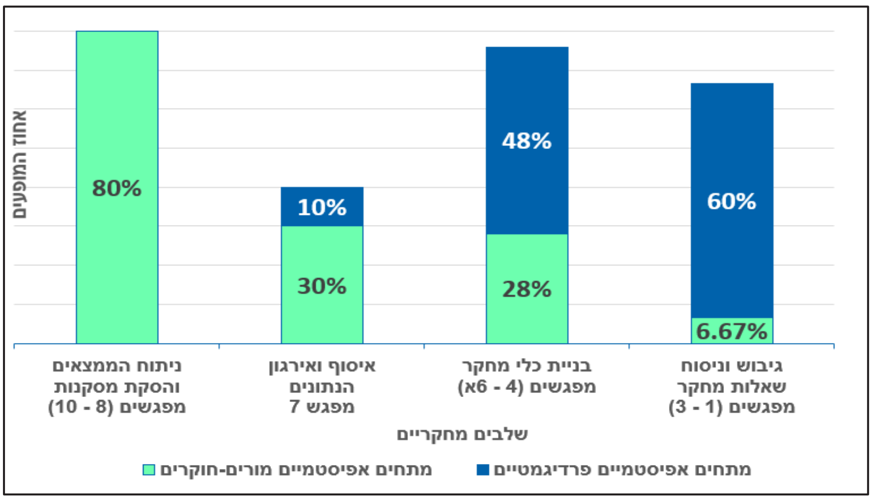
קטגוריה	תת-קטגוריה
מתחים אפיסטמיים נובעים מתוך אמונות הנוגעות לידע והצדקתו.	**מתחים אפיסטמיים פרדיגמטיים** שמקורם בציפיות של מורים לעסוק במחקר כמותני, בניגוד למחקר האיכותני המתנהל בקהילה
	מתחים אפיסטמיים מורים-חוקרים שמקורם בהבדלים אפיסטמיים המושרשים באוריינטציות המקצועיות השונות שמורים וחוקרים צריכים לאמץ על מנת לבצע את עבודתם.
מתחים פונקציונליים נובעים מפערים בין ציפיות המורים לגבי ההתנהלות המעשית בקהילה לבין הנוהלים הקהילתיים בפועל.	**מתחים פונקציונליים הקשורים להתקדמות מחקרית קהילתית** קשורים בהיבטים מעשיים שונים המשפיעים על חקר הקהילה.
	מתחים פונקציונליים הקשורים לדרישות המחקר סביב היבטים מעשיים שונים של החקר (כמו דרישות עבודה או תזמון), המשפיעים באופן אישי על המשתתף
מתחים חברתיים מקורם בפערי ציפיות חברתית של משתתפי הקהילה	**מתחים חברתיים תוך אישיים** מתחים חברתיים המתרחשים בין האדם לבין עצמו.
	מתחים חברתיים בין אישיים מתחים חברתיים המתרחשים בין שני אנשים או יותר.

ממצאים

69 מתחים זוהו בשיח הקהילתי, סווגו לקטגוריות ומופו על פי השלבים המחקריים שנוהלו בקהילה. בעוד מתחים פונקציונליים ומתחים חברתיים נטו להיות פחות שכיחים, והיו ממוקדים בצרכים אידיבידואליים רגעיים, המתחים האפיסטמיים היוו את עיקר המתחים שנחשפו בשיח הקהילתי, ובלטו בכל אחד משלבי המחקר הקהילתי. חלוקת המתחים האפיסטמיים לקטגוריות משנה חשפה סדר התרחשויות מפתיע (ראו איור 1).

איור 1

הדינמיקה של מתחים אפיסטמיים על פני שלבי המחקר הקהילתי (אחוז המתחים האפיסטמיים חושב מתוך סך המתחים שבאו לידי ביטוי בשלב המחקר הספציפי)



מתחים אפיסטמיים פרדיגמטיים היו דומיננטיים מאוד בשני שלבי המחקר הראשונים, אולם ירדו בבת אחת, במקביל לעזיבתן של שלוש מורות, ונעלמו לחלוטין בשלב המחקר הרביעי. מתוך הראיונות התברר כי שלוש המורות עזבו משום שלא יכלו להשלים עם המחקר האיכותני שנערך בקהילה. כנגד זאת, ככל שהקהילה התקדמה בשלבי המחקר, שיעור המתחים האפיסטמיים הקשורים בהבדלים שבין מורים וחוקרים עלה באופן חד. הדבר הגיוני לחלוטין, משום שככל שהמורים והחוקרים הפכו מעורבים יותר במחקר, בלטה יותר המכוונות המקצועית השונה שלהם. עם זאת, נראה כי השיח המכוון, המודע והפתוח לגבי ההבדלים שבין מורים וחוקרים, שקויים לאורך כל שנת הפעילות, סייע למורים לבטא מתחים אלו, לאזן אותם בדרכים קונסטרוקטיביות, ולהפוך אותם למניע ללמידה.

הממצאים מצביעים על כך שמתחים אפיסטמיים, הנוגעים לפרדיגמה המחקרית או הקשורים במכוונות המקצועית השונה של מורים וחוקרים, משמשים מחוללים חזקים של פעולות הכללה והדרה המעצבות את דפוסי ההשתתפות של חברי הקהילה. בעוד שחוסר שיח לגבי מתחים אפיסטמיים פרדיגמטיים עלול לעורר פעולות אינדיבידואליות הרסניות לקיום הקהילתי, מודעות והתמודדות מתוזמנת מראש עם המתחים האפיסטמיים יכולות לייצר קרש קפיצה להתפתחות הקהילה.

לסיכום, כל קהילה לומדת מבוססת חקר היא שונה, הן בהקשר שלה, והן במורים הפעילים בה. כפועל יוצא, מובילי קהילות צריכים להיות מודעים להשפעה שמתחים מסוגים שונים מפעילים על דפוסי ההשתתפות בקהילה, ולמצוא דרכים קונסטרוקטיביות להנחות מורים משתתפים לביצוע פעולות המטפחות את התפתחותם המקצועית. בהתבסס על ממצאי מחקר זה, אנו מעודדים את מובילי הקהילות לשקול בכובד ראש כיצד הדינמיקה של המתחים הספציפיים מעצבת את הקהילה שלהם.

רשימת מקורות

Crandall, C. S., Silvia, P. J., N'Gbala, A. N., Tsang, J. A., & Dawson, K. (2007). Balance theory, unit relations, and attribution: The underlying integrity of Heiderian theory. *Review of General Psychology*, *11*(1), 12-30. https://doi.org/10.1037/1089-2680.11.1.12

Heider, F. (1958). The psychology of interpersonal relations. New York: Wiley. https://doi.org/10.1037/10628-000

Jaworski, B., Chapman, O., Clark-Wilson, A., Cusi, A., Esteley, C., Goos, M., Masami, I., Jouberg, M. & Robutti, O. (2017). Mathematics teachers working and learning through collaboration. In *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education,* 261-276. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62597-3_17

Kieran, C., Krainer, K., & Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education*, 361-392. Springer: New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_12

Koichu, B., & Pinto, A. (2018). Developing Education Research Competencies in Mathematics Teachers Through TRAIL: Teacher-Researcher Alliance for Investigating Learning. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *18* (1), 68-85. https://doi.org/10.1007/s42330-018-0006-3

Labaree, D. F. (2003). The peculiar problems of preparing educational researchers. *Educational researcher*, *32*(4), 13-22. https://doi.org/10.3102/0013189X032004013

Taylor, L. A. (2017). How teachers become teacher researchers: Narrative as a tool for teacher identity construction. *Teaching and Teacher Education*, *61*, 16-25. https://doi.org/10.1016/j.tate.2016.09.008

Wenger, E. (2010). Communities of practice and social learning systems: The career of a concept. In C. Blackmore (Ed.), *Social Learning Systems and Communities of Practice*, 179–198. London: Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-84996-133-2_11

"דוגמאות" בלתי אפשריות בגיאומטריה, ותרומתן ללמידה

קרני שיר[1], איריס זודיק[2], אורית זסלבסקי[2,3], גילה רון[4]

[1] שאנן – מכללה אקדמית דתית לחינוך; [2] הטכניון; [3] אוניברסיטת ניו-יורק; [4] מכללת אוהלו

מבוא

לדוגמאות יש תפקיד חשוב בלמידת מתמטיקה, בהקשרים של הכללה, הפשטה, והוכחות (Zaslavsky & Knuth, 2019). בשונה מדוגמאות מתחום האלגברה, למשל, שלא בהכרח מוצגות באופן ויזואלי, דוגמאות בגיאומטריה נשענות ברובן על ייצוג ויזואלי. ויזואליזציה במתמטיקה היא תהליך של יצירת תמונה (מנטלית, באמצעות נייר ועפרון, או באמצעים טכנולוגיים) ושימוש בה לצורך חקר ו/או חידוד ההבנה (Zimmermann & Cunningham, 1991). הרכבי (Arcavi, 2003) מתייחס למתמטיקה כעולם מופשט ומתייחס לויזואליזציה כ-'Seeing the Unseen'.

הגיאומטריה בתכנית הלימודים עוסקת במידה רבה ב*מושגים פיגורטיביים* (פישביין, 1993). למושגים פיגורטיביים יש שני היבטים – היבט קונספטואלי והיבט פיגורטיבי. מושגים פיגורטיביים לפי פישביין כוללים ייצוג מנטלי של תכונה במרחב. בספרי גיאומטריה מושגים פיגורטיביים מתוארים לעיתים באופן מילולי, שכולל מספר נתונים הקובעים טווח של מקרים אפשריים. לרוב דוגמאות גיאומטריות מיוצגות באמצעות כלי ויזואלי, כמו סקיצה, או בצורה יותר מדויקת כבניה בגיאומטריה דינמית או באמצעות סרגל ומחוגה. לייצוגים כאלה אנו מתייחסים כדוגמה ויזואלית. דוגמה ויזואלית היא למעשה ייצוג (לא בהכרח מדויק) של מקרה אחד מתוך אוסף גדול יותר של מקרים אפשריים. מקרה מייצג צריך שיהיו לו כל האלמנטים המשותפים לאוסף שהוא מייצג (אלה נקראים אלמנטים קריטיים). מטבע הדברים, יכולים להיות לו אלמנטים ספציפיים לא קריטיים (או לא רלבנטיים). בשונה מתחומים אחרים במתמטיקה, קשה או אפילו בלתי אפשרי לייצג דוגמה כללית/גנרית של מושג גיאומטרי (Mason & Pimm, 1984). איך, למשל, ייראה "משולש כללי"? ברגע שנשרטט סקיצה של משולש, יהיו לו אלמנטים ספציפיים שלא רלבנטיים. בכל דוגמה יש אלמנטים קריטיים ואלמנטים לא רלבנטיים (שמהווים "רעש", לפי Skemp, 1987). הרבה שאלות עולות לגבי מה ניתן ומה לא ניתן להסיק מדוגמה גיאומטרית. במלים אחרות, איזה מידע טמון בסקיצה של אובייקט גיאומטרי ואיזה לא (Zodik & Zaslavsky, 2007). למשל, אם שלוש נקודות מסומנות על אותו קו ישר, אפשר להניח בבטחון שהן קו-לינאריות. אבל אם בשרטוט של מצולע, צלע אחת נראית גדולה מצלע אחרת, אם אין נתונים נוספים שתומכים בכך, יכול להיות שזה מקרי בלבד.

דוגמאות ויזואליות בגיאומטריה כוללות בתוכן מורכבות שאיננה בהכרח קיימת בדוגמאות בתחומים אחרים במתמטיקה. בשל הקלות בה ניתן לשרבט סקיצה של המושג, ולסמן נתונים על סקיצה זו, קיים בתחום זה פוטנציאל גדול יותר להיווצרות של דוגמאות בלתי אפשריות. כלומר, "דוגמאות" ויזואליות של אובייקטים אשר אינם באמת קיימים. כאשר הדוגמה הגיאומטרית כוללת גם נתונים על מידות של קטעים או זוויות, יש לנקוט משנה זהירות, מאחר ודרגות החופש מוגבלות, ואם מציגים עודף נתונים הנתונים עלולים להיות סותרים. מצב כזה קורה לעיתים קרובות כשתלמידים בונים בניות עזר עם אילוצים לא אפשריים. <u>מכיוון שהסקת מסקנות המבוססת על דוגמאות לא אפשריות עלולה, במקרים רבים, להוביל למסקנות מוטעות ולהיווצרות של מבני ידע נכונים חלקית, או כאילו שכלל</u>

<u>אינם נכונים, חשוב שתלמידים, פרחי הוראה, ומורים יהיו מודעים לקיומן של "דוגמאות" מסוג זה והסכנות הטמונות בהן.</u>

מטרת המחקר המתואר הנה עמידה על תגובה של פרחי הוראה לסיטואציה בה מוצגת להם דוגמא לא אפשרית בגיאומטריה.

תיאור המחקר

מחקר זה הנו חלק ממחקר גדול יותר שמטרתו לעמוד על התרומה של "דוגמאות" בלתי אפשריות כמנוף ללמידה. במסגרת ההצגה בכנס נתמקד בשאלה: כיצד מיישבים פרחי הוראה את הקונפליקט המתמטי המתעורר בעקבות חשיפה ל"דוגמא" (לא אפשרית) מתחום הגיאומטריה, ועם אילו מסקנות הם יוצאים מהפעילות.

<u>אוכלוסיית המחקר</u> כללה שתי קבוצות. 34 פרחי הוראה הלומדים לתעודת הוראה במתמטיקה בביה"ס העל יסודי, ו־39 פרחי הוראה הלומדים לתעודת הוראה במתמטיקה בביה"ס היסודי.

<u>כלי המחקר</u> במסגרת המחקר נחשפו פרחי ההוראה למספר "דוגמאות" בלתי אפשריות בדרגות קושי שונות.

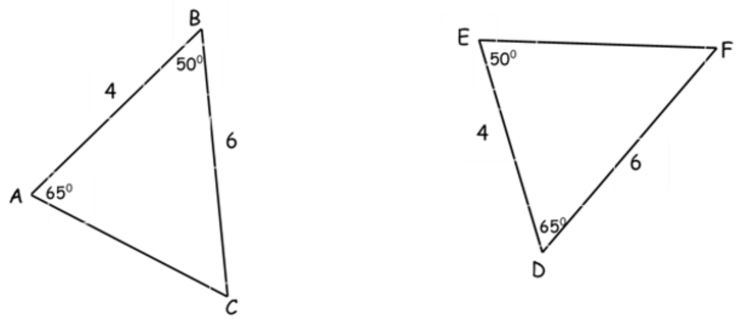
בשאלה הראשונה (איור 1א) הופיע זוג "משולשים" בלתי אפשריים, שהסטודנטים התבקשו לקבוע אם הם חופפים או לא. כיוון שהמשולשים המופיעים בשאלה לא קיימים במציאות, הם הוצגו כהצעה של תלמיד (בשלב זה הם טרם נחשפו לאפשרויות השונות המופיעות באיור 1ב).

איור 1

השאלות אותן נשאלו פרחי ההוראה

א

דנה ויואב לומדים על משולשים חופפים. יואב צייר את שני המשולשים הבאים ושאל את דנה האם הם חופפים? האם לדעתך יואב צייר משולשים חופפים? הסבר.



ב

דנה אמרה ליואב ששני המשולשים חופפים לפי משפט זווית צלע זווית: $\angle A = \angle D = 65^\circ$ (נתון) $AB = DE = 4$ (נתון) $\angle B = \angle E = 50^\circ$ (נתון) ולכן $\Delta ABC \cong \Delta DEB$ (ז.צ.ז)	יואב אמר לדנה שהיא טועה, והוא צייר שני משולשים שאינם חופפים. הוא הזכיר לה שבמשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות, ואילו כאן במשולש ABC מול הצלע שאורכה 6 יחידות יש זווית של 65°, ואילו במשולש DEF מול הצלע שאורכה 6 יחידות אורך יש זווית של 50°, ולכן המשולשים אינם חופפים.	קרן אמרה לשניהם, שאם שני המשולשים הם חופפים אז מהחפיפה נובע כי $AC = DF = 6$ (צ.מ.ב.ח) ואז משולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($CA = CB = 6$) וזה לא ייתכן מכיוון ש $\measuredangle A \neq \measuredangle B$

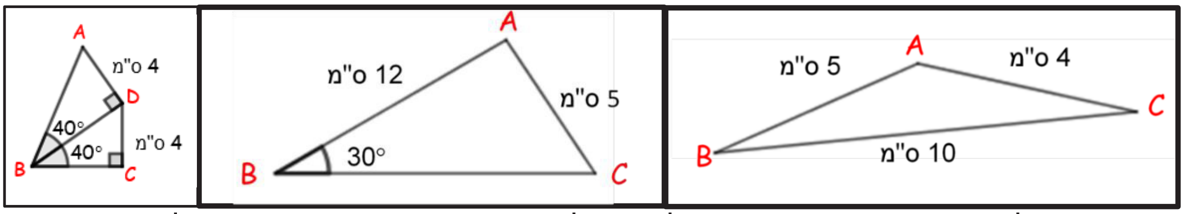
מצד אחד נראה שהמשולשים חופפים על פי משפט חפיפה ז.צ.ז ($\angle A=\angle D$, $AB=DE$, $\angle B=\angle E$). מצד שני במשולשים חופפים מול צלעות שוות זוויות שוות, ואילו כאן במשולש ΔABC מול הצלע שאורכה 6 יחידות יש זווית של 65^0 ואילו במשולש ΔDEF מול הצלע שאורכה 6 יחידות יש זווית של 50^0. מצב זה סותר את החפיפה ולכן המשולשים אינם חופפים. נציין שמי ששם לב לתנאי החפיפה יכול לקבוע בבטחה שהמשולשים חופפים ולעבור הלאה, ומי ששם לב לתנאים הסותרים חפיפה יכול לקבוע בביטחה שהמשולשים אינם חופפים ולעבור הלאה. בשלב זה ההבדל בין התשובות יכול לנבוע ממיקוד תשומת הלב בפרטים אחרים של האיור.

כדי להסב את תשומת הלב של התלמידים למסקנות הסותרות שיכולות לעלות בסיטואציה בלתי אפשרית זו, בשאלה השנייה והשלישית הוצגו קביעות מנוגדות מנומקות של שלושה תלמידים, ועל פרחי ההוראה היה לומר מי לדעתם צודק. איור 1ב מתאר את השאלות שהוצגו.

השאלה הרביעית כללה אוסף "דוגמאות" בדרגת קושי עולה, אשר הוצהר עליהן מראש כי הן בלתי אפשריות. שלוש מתוך ה"דוגמאות" הללו מתוארות באיור 2.

איור 2

שלוש "דוגמאות" בלתי אפשריות בדרגת קושי שונה, מתוך אוסף ה "דוגמאות" שקיבלו פרחי ההוראה.



המטרה של הצגת אוסף זה היתה כפולה: גם לבדוק אם פרחי הוראה יודעים לזהות באובייקטים שהוצגו להם, תכונות שלא יכולות להתקיים בעת ובעונה אחת, וגם לבדוק אם העיסוק ב"דוגמאות" בלתי אפשריות, בכללן חשיבה על "דוגמא" לא אפשרית הדומה לזו שתוארה בשאלה הראשונה,יגרום לפרחי ההוראה להבחין שגם בשאלה הראשונה הוצגו "דוגמאות" בלתי אפשריות.

השאלה החמישית החזירה אותם לשאלה הראשונה. לאחר העיסוק ב"דוגמאות" בלתי אפשריות, ניתנה להם האפשרות לחשוב מחדש על הסיטואציה המתוארת ולענות שוב על השאלה.

ממצאים ודיון

בשאלה הראשונה בה נשאלו פרחי ההוראה האם שני המשולשים אותם צייר יואב הנם חופפים, 21 פרחי הוראה (29%) טענו שהם חופפים, 27 (37%) טענו שהם אינם חופפים, 16 (22%) טענו כי מתואר מצב לא הגיוני/לא ייתכן/שגוי, ו־9 פרחי הוראה (12%) לא ידעו כיצד להתייחס לשאלה.

במשימה השנייה עומתו פרחי ההוראה עם התשובות המנוגדות של דנה ויואב (איור 1ב). חלק מפרחי ההוראה, גם לאחר שעומתו עם הסתירה, לא ראו את הבעייתיות והצדיקו את דנה או את יואב. חלק אפילו הצדיקו את שניהם. היו גם כאילו שממש ראו שמתקיים משפט חפיפה ובכל זאת טענו כי המשולשים לא חופפים. ניתן להסיק כי לאותם פרחי הוראה לא לגמרי ברורה המשמעות של קיום תנאים מספיקים לחפיפה, והמסקנה החד משמעית הנובעת מכך. להלן שתי דוגמאות של נימוקים של אותם פרחי הוראה: *"יואב צודק, כי במשולשים חופפים מול צלעות שוות מונחות זוויות שוות"* ו־*"דנה צודקת, הטענה של יואב אינה מספיקה על מנת לטעון זאת".*

לעומת זאת, היו פרחי הוראה אשר בעקבות החשיפה לתשובות הסותרות הסיקו (או דעתם התחזקה) כי המשולשים אינם קיימים:

"הנתונים המספריים שגויים לא ניתן ליצור שני משולשים שנושאים את כל התכונות האלו לכן השאלה האם הם חופפים או לא מטעה, לא ייתכנו כאלה שני משולשים. אם כל מה שהיה נתון היו רק 3 הנתונים שדנה התייחסה אליהם הרי שהוכחת החפיפה היתה טובה, אבל רק בתנאי הזה".

מבחינת הסברים שניהם צודקים, במשולשים מדויקים ומצוירים נכון זה אכן המצב, השאלה כאן לא מכילה נתונים אמינים ולכן אי אפשר להסתמך על זה".

<u>במשימה השלישית</u> הוצג בפני פרחי ההוראה הנימוק של קרן אשר על פיו מהחפיפה נובעת סתירה (איור 1ב). חלק מפרחי הוראה התייחסו לנימוק של קרן כחיזוק לדבריו של יואב כאשר המסקנה שלהם מכך שהמצב איננו אפשרי היתה שהמשולשים אינם חופפים:

"הנימוק של יואב סותר את החפיפה ולכן הוא הכי נכון בעיני, וגם קרן מעלה טיעון יפה ונקודת מבט נוספת".

"הנימוק של יואב והנימוק של קרן שניהם משכנעים, פשוט קרן פישטה את תשובתו של יואב".

"קרן נתנה הסבר משכנע. ההסבר שלה מתייחס לחוסר ההתאמה בחפיפה ולכן היא מצליחה לסתור את החפיפה".

"ההסבר של יואב הוא ההסבר הכי משכנע, כי הוא הסתמך על משפט חפיפה וראה שזה לא מתקיים במשולשים האלו לכן הוא הגיע למסקנה שהם לא חופפים"

אחרים הסכימו עם הנימוק של קרן, וראו בו הסבר לכך שמתואר מצב לא אפשרי. חלקם אפילו התייחסו מפורשות לכך שזו סוג של הוכחה בדרך השלילה לאי-קיום זוג משולשים כגון זה המתואר בציור של יואב:

"לדעתי ההסבר של קרן משכנע מאחר והיא מוכיחה את טענתה בכך שמראה את הטעות המתמטית, ולא מעלה טענה נוספת שלא התקיימה".

"קרן צודקת שזה לא אפשרי, למרות שהיא השתמשה בהוכחה בשלילה כדי להוכיח אי חפיפה במקום לגלות שהמשולשים אינם מוגדרים היטב".

הרבה פרחי הוראה לא לקחו בחשבון מצב שבו "דוגמאות" הן בלתי אפשריות. גם הפעילות לזיהוי מצבים בלתי אפשריים במשימה 4 (איור 2) לא גרמה לפרחי ההוראה לעשות בעצמם את הקישור ולומר במפורש שלא ייתכן שיתקיימו תנאי חפיפה ובכל זאת המשולשים לא יהיו חופפים. והיה צורך להקדיש לכך דיון נוסף.

בהתנסות שלנו בכיתה אנחנו יכולים להיתקל, לעיתים, בסיטואציה בהן עולה "דוגמא" לא אפשרית. דוגמאות בלתי אפשריות מסוג זה יכולות להיווצר בסיטואציות שונות באופן ספונטני, בלי שהנוכחים יהיו מודעים לכך כי הדוגמא המוצגת איננה אפשרית. לעומת זאת, דוגמאות מסוג זה יכולות להיות מובאות באופן מכוון, ולהוות פתח לדיון כיתתי והעמקה של ההבנה המתמטית. מינוף של סיטואציות ספונטניות כגון אלו יכול לחדד את ההבנה של דקויות מתמטיות, גם של המורה וגם של הכיתה כולה. חשוב להיות מודעים לפוטנציאל הגלום במצבים אלה ולדיונים המעניינים שהם יכולים לזמן.

רשימת מקורות

Arcavi A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215-241.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162.

Mason, J., & Pimm, D. (1984). Generic examples: Seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics, 15(3),* 277–290.

Skemp, R. R. (1987). *The psychology of learning mathematics: Expanded American edition*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates

Zaslavsky, O. & Knuth, E. (2019). The complex interplay between examples and proving: Where are we and where should we head? *Journal of Mathematical Behavior, 53*, 242-244.

Zimmermann W. & Cunningham S. (1991). Editors' Introduction: What is mathematical visualization?. In Zimmermann W. and Cunningham S. (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics* (pp. 1-8). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Zodik, I. & Zaslavsky, O. (2007). Is a visual example in geometry always helpful? In J-H. Woo, H-C. Lew, K-S. Park, & D-Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, v.4, 265-272.

הדמיון כאמצעי למידה של מורים – המקרה של "עץ המימושים" סביב משימה מתמטית

<u>מרב וינגרדן</u>, עינת הד־מצויינים

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

מחקרים רבים הראו שתהליך ההכשרה של פרחי הוראה למתמטיקה להוראה המעודדת חקירה וחשיבה ברמה גבוהה הוא מורכב וקשה ליישום (Cohen, 1990; Heyd-Metzuyanim, Smith, Bill, & Resnick, 2019). אחת הסיבות שקשה לפרחי ההוראה ללמוד וליישם הוראה כזו נעוצה בשוני בין עולם הדימויים שלהם על הוראה, כפי שהיו חשופים אליו כתלמידים בבית הספר, לבין עולם הדימויים והערכים של הוראה מעודדת חקירה (Ma & Singer-Gabella, 2011). על פי Wenger (1998), הדמיון חשוב והכרחי לתהליכים אלו מכיוון שהוא מאפשר ללומד – במקרה שלנו, המורה – לבחון האם וכיצד הוא משתייך לקהילה החדשה אליה הוא מצטרף, עם אילו "חוקים" של הקהילה הוא מסכים ובאיזו דרך הוא תופש את עצמו כחלק מהקהילה. אמצעים מדומיינים, שבעזרתם יכול הלומד ליצור תמונה של העולם ולראות קשרים בזמן ובמרחב על ידי השערות ומסקנות מהניסיון שלו, מעצבים את זהותו ותורמים לתהליך הלמידה שלו. אולם, מחקרים מועטים התייחסו לנושא של דמיון ביחס לתהליכי הכשרת מורים ולאמצעים שדרכם אפשר לעודד דמיון פרודוקטיבי ללמידה. במחקר הנוכחי נתמקד בפוטנציאל של אמצעי מדומיין – שיעור מתמטיקה המתואר באמצעות "עץ המימושים" RTA (Realization Tree Assessment tool) ובהזדמנויות הלמידה שהוא מאפשר לפרחי הוראה.

"עץ המימושים " – RTA

ה־RTA נוצר במקור ככלי להערכת שיעורי מתמטיקה המאפשר השוואה בין מידת ההשתתפות החקירתית של התלמידים בשיעורים שונים (Weingarden, Heyd-Metzuyanim, & Nachlieli, 2019). השתתפות חקירתית בשיעורי מתמטיקה, ע"פ הגישה הקומוגניטיבית ללמידה (Sfard, 2008) כוללת פיתוח של נרטיבים על עצמים מתמטיים על ידי התלמיד. זאת, בניגוד להשתתפות ריטואלית בה התלמיד בעיקר משחזר הליכים שהודגמו לו על ידי אדם אחר (לרוב המורה) ועיקר השתתפותו בשיח היא כדי לשמר את מעמדו החברתי. השתתפות חקירתית מתרחשת כאשר הלומד מדבר על אובייקטים מתמטיים כמועצמים (objectified) – כקיימים בזכות עצמם ללא קשר לפעולות, לבני אדם ולזמן. כחלק מתהליך זה, על הלומד להָדְמות (to same), כלומר, לראות מימושים שונים של עצם מתמטי כ"אותו דבר" (Sfard, 2008, p. 170). לדוגמא, העצם המתמטי "פונקציה" ומימושיו השונים: f(x)=3x+5; y=3x+2+3; 8(,1),(0,5); גרף הפונקציה ומימושים ויזואליים שונים המתאימים לסיפור המיוצג על ידי הפונקציה.

ה־RTA מראה באופן ויזואלי את מימושי האובייקט המתמטי המרכזי שנדון בשיעור, את הקשרים ביניהם, ועד כמה התלמידים היו שותפים ליצירת נרטיבים לגבי המימושים השונים. ב**איור 1** מופיעה משימת המשושים, שעליה התבססו שני שיעורים שונים. ב**איור 2** מופיעים איורי RTA עבורם.

איור 1

משימת המשושים

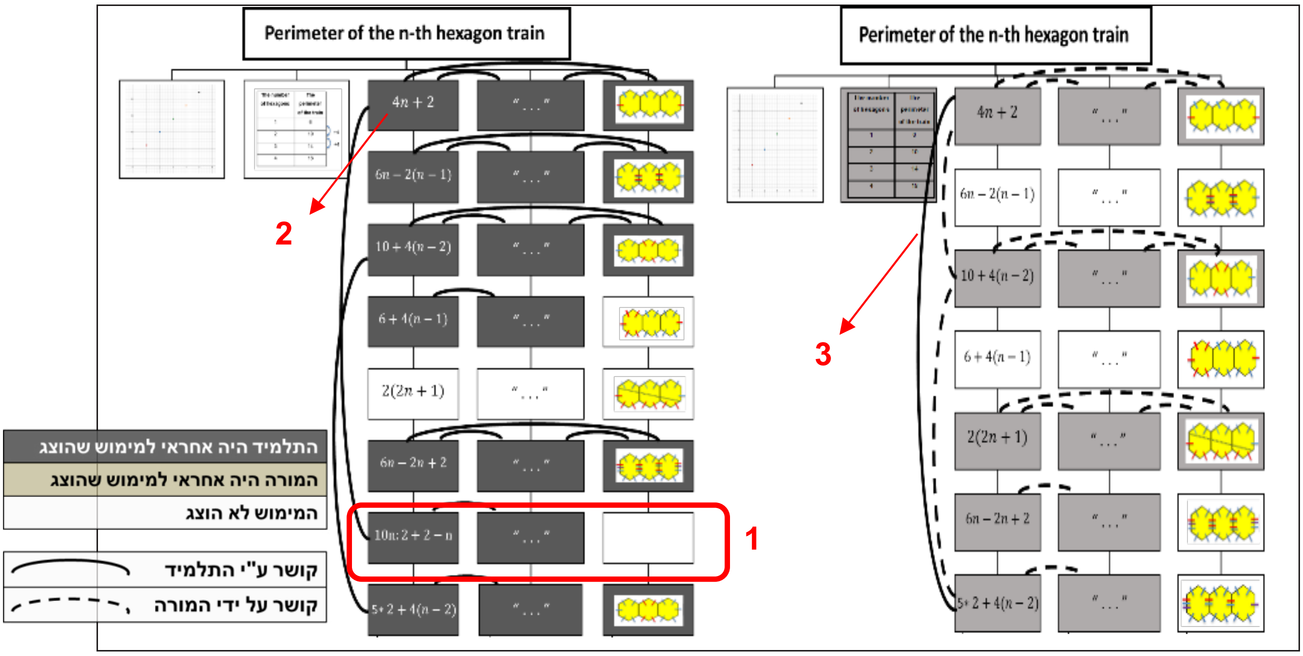
לפניך ארבעת האיברים הראשונים בסדרה של משושים. עבור כל איבר עוקב בסדרה, משושה אחד נוסף לרכבת.

נסה למצוא דרך מסוימת שתעזור לך לתאר את היקף הרכבת ברכבות ארוכות יותר.

משימת המשושים היא משימה בעלת פוטנציאל עשיר להשתתפות חקירתית משום שישנן דרכים רבות ומגוונות לתאר את היקפן של רכבות ארוכות, ובכך היא מזמנת עיסוק עם סוגים שונים של מימושים (אלגבריים, ויזואליים וכד') ועם הקשרים ביניהם. לאור זאת, נעשה בה שימוש נרחב בהשתלמויות של הוראה מעודדת־חקירה כמטלה קלה יחסית ליישום עבור מורים שאינם מנוסים בהוראה כזו (Heyd-Metzuyanim, Nachlieli, Weingarden, & Baor, 2020). בראש העץ (**איור 2**) מוצג העצם המתמטי הפוטנציאלי של המשימה: "היקף הרכבת במקום ה־n" ומתחתיו מוצגים כל המימושים השונים שלו. המימושים שהוזכרו בשיעור נצבעו בהתאם למי שיצר את הנרטיבים על אודות המימושים (התלמיד או המורה) והקשרים שנערכו בין מימושים שונים סומנו גם כן בהתאם למי שיצר את הקשרים (התלמיד או המורה). כך למשל, באיור הימני המורה הציג את הביטוי האלגברי 4n+2 (המלבן הראשון בענף המימושים האלגבריים), קישר אותו למימוש הוויזואלי של רכבות המשושים (המלבן הראשון בענף המימושים הוויזואליים) שכלל סימונים שונים על צלעות המשושים, הציג את המימוש המילולי ("כל קרון ברכבת תורם 4 צלעות להיקף הכללי בנוסף לשתי הצלעות החיצוניות") וקישר בין שלושת המימושים הללו. אותם מימושים וקשרים מתוארים גם באיור ה־RTA השמאלי, רק שבשיעור זה התלמידים הם אלו שהציגו את המימושים וקישרו ביניהם ולא המורה.

איור 2

שני איורי RTA שונים שעליהם דנו הסטודנטים במהלך הסדנה



במהלך עבודתנו עם ה־RTA סביב הערכת שיעורים, הצגנו אותו לסטודנטים להוראה כחלק מקורס שנועד להכיר להם דרכי הוראה המעודדת־חקירה. הסטודנטים העלו תרחישים של שיעורים שיוצגו באמצעות תמונות ה־RTA. מטרתנו במחקר הרחב יותר היא לבחון את הפוטנציאל הפדגוגי שקיים ב־RTA כאמצעי למידה מדומיין. בהצגה זו, נתמקד באפיון צורות הדמיון שעלו בדיון ובפוטנציאל הפדגוגי שלהן. לפיכך שאלת המחקר היא: אילו סוגי דמיונות התאפשרו מתוך דיון על תמונות ה־RTA?

מתודולוגיה

המחקר התקיים במהלך קורס בטכניון בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בו השתתפו 15 סטודנטים להוראה (חלקם כבר מלמדים) בסדנה שנמשכה ארבע שעות אקדמיות. הסדנה כללה שלושה חלקים עיקריים: (1) הצגת היבטים תיאורטיים של ה־RTA; (2) קידוד RTA ריק המבוסס על סרטון קצר של שיעור בו הוצגה *משימת המשושים*; (3) השוואה ודיון בייצוגים שונים של תמונות RTA צבועות. את הסדנה העבירו כותבות המאמר. במאמר זה נתמקד רק בחלק השלישי של הסדנה הכולל שלושה זוגות של תמונות RTA. כל תמונות ה־RTA נבחרו ממאגר של RTA שקודדו בעבר למחקרים שונים הקשורים להערכה של שיעורים (Weingarden et al., 2019). הסדנה צולמה בווידיאו והדיון במליאה על זוגות ה־RTA תוכתב.

הניתוח כלל שני שלבים עיקריים. בשלב הראשון, מיפינו את כל האמירות המדומיינות – אמירות המבוססות על תמונת ה־RTA ומכילות מרכיב דמיוני. בשלב השני, כדי לזהות אילו סוגי דמיונות התאפשרו מתוך הדיון על תמונות ה־RTA, השתמשנו בתאוריה הקונסטרוקטיביסטית המעוגנת בשדה (Charmaz, 2006). בשלב הקידוד הראשוני, תייגנו את האמירות המדומיינות לקודים שונים ובהמשך קיבצנו את הקודים הללו לארבע קטגוריות שונות המאפיינות שלושה סוגי דמיון שהתאפשרו מתוך הדיון על תמונות ה־RTA.

ממצאים מרכזיים

מפאת מגבלות המקום, נציג את סוגי הדמיון בדיון שנערך על אחד מזוגות ה־RTA (**איור 2**). בתחילת הדיון על זוג תמונות אלו הסטודנטים דנו בהבדלים בין השיעורים המיוצגים על ידי האיורים ובהמשך הדיון הם יצרו סיפורים מדומיינים על המורה, התלמידים, ההוראה והלמידה. וכל זה, מתוך תמונות ה־RTA השונות. נציג להלן את שלושת סוגי הסיפורים המדומיינים אותם מצאנו.

דמיון באמצעות התייחסות כללית להוראה

הסוג הראשון של הדמיון – דמיון באמצעות התייחסות כללית להוראה, בא לידי ביטוי כאשר הסטודנטים סיפרו סיפור מדומיין כללי על השיעור, המורה והתלמידים. כך למשל, בתחילת הדיון על תמונות ה־RTA, הסטודנטים נשאלו: "מה אתם יכולים להגיד על שני השיעורים האלה?". כתגובה, אחת הסטודנטיות ענתה: "עשירים, *הרבה מימושים*, אבל אחד מורה אחד תלמיד". סטודנט נוסף אמר: "אין עידוד חקר *בצד הימני*". הסטודנטים התייחסו בדבריהם לתמונת ה־RTA ("הרבה מימושים", "בצד הימני") ויצרו באמצעות התמונה תסריטים מדומיינים על השיעורים הללו ("עשירים"), על צורת העבודה בהם ("אין עידוד חקר") ועל "יחסי הכוחות" בשיעור ("אחד מורה אחד תלמיד"). גם על המורה והתלמידים, הסטודנטים יצרו סיפורים מדומיינים. למשל, אחת הסטודנטיות תיארה את המורה באיור

הימני כ"מאכיל אותם [את התלמידים] לא בכפית אלא בזונדה", ועל התלמידים באיור הימני היא אמרה שהם "צריכים לא רק דחיפה אלא גם בעיטה". בסיפור מדומיין זה היא מציגה את התלמידים כאלו שזקוקים לתמיכה רבה מצד המורה והמורה תומך בהם יותר מידי, כך שאינם מתמודדים לבד. יצירת סיפורים מדומיינים המתייחסים לשיעור בכללותו אפשרה לדון בסוגים שונים של שיעורים, כיתות, תלמידים ומורים ולדון בכך ש"שיעור" כיחידה יכול לשאת אופי שונה מאוד בין שיעור למשנהו.

דמיון באמצעות התייחסות לפעולות הוראה־למידה

לעומת סוג הדמיון הראשון, סוג הדמיון השני אופיין בהתייחסות לפעולות הוראה־למידה. סוג זה מכיל פעולות הוראה־למידה כלליות המתייחסות לשיעור כולו. לדוגמה בהיגד הבא (אמירות המתייחסות לפעלים מסומנות בקו תחתון): "בקבוצה הזו [האיור השמאלי] התלמידים <u>ידעו להסתכל</u> גם על הביטוי וגם על הציור <u>ולנמק ולהסביר</u> אותו. ופה [האיור הימני] המורה <u>עשה</u>". סוג דמיון זה גם מכיל פעולות הוראה ממוקדות יותר המתייחסות למימוש מתמטי או קשר ספציפי בין מימושים. לדוגמה: "בשורה לפני האחרונה [מסומן באיור במס' 1] המורה <u>לא העביר</u> להם את זה בצורה של הציור [המימוש הוויזואלי של רכבות המשושים]. הוא <u>לקח את הביטוי</u> שלמעלה, את ה־4n+2 [מסומן באיור במס' 2] <u>ואמר</u> שאפשר גם לפתוח את זה." באמירה זו, הסטודנט התייחס לרעיון המתמטי של שקילות בין ביטויים אלגבריים ולפעולות ההוראה של המורה המקדמות רעיון זה. למעשה, הוא יצר תסריט מדומיין שלם סביב אחד ממקטעי העץ, הכולל בתוכו גם התייחסות למה שהמורה עשה (מה אמר לגבי ה־4n+2), גם למה שהמורה לא עשה (לא התייחס לציור) וגם לרעיון המתמטי של השיעור (שקילות הביטויים השונים ל־4n+2). יצירת סיפורים מדומיינים על ידי התייחסות לפעולות הוראה־למידה אפשרה לסטודנטים להתייחס להיבטים מדויקים יותר של מאפייני ההוראה המעודדת חקירה, הכוללת, בין השאר, התייחסות למימושים שונים של אובייקטים מתמטיים ולקישור ביניהם.

דמיון באמצעות התייחסות לזמן ולסדר הדברים

סוג הדמיון השלישי – דמיון באמצעות התייחסות לזמן ולסדר האירועים, מאופיין באמירות שמתייחסות לממד הזמן ולסדר שבו הדברים קרו בשיעור. אמירות אלו מאופיינות במילות מפתח המתארות זמן וסדר (לפני כן, אחרי זה וכד'). דוגמא לסוג דמיון זה מצאנו בדיון ער שהתקיים סביב הקשת הרציפה היחידה באיור הימני (מס' 3 באיור). כחלק מהדיון אחד הסטודנטים אמר: "לי יש תחושה <u>שיש פה</u> <u>הרבה משמעות לסדר</u> ויכול להיות שהקישור האחרון הגדול [מס' 3 באיור] שהתלמידים עשו יכול להיות שהוא נעשה כחיקוי למה שהמורה עשה <u>לפני כן</u>". הסטודנט, מבלי לדעת את סדר האירועים בשיעור (מידע שה RTA- לא מייצג), ייצר סיפור מדומיין שבו לסדר הפעילויות הייתה משמעות. בעקבות יצירת סיפור מדומיין זה, הסטודנטים דנו בסוגיה הפדגוגית אודות ה"חיקוי": האם קישור זה שנעשה על ידי התלמידים הוא בעל ערך גם כאשר הוא נעשה כחיקוי לפעולות המורה? אולי המורה עודד אותם לעשות קישור זה? אולי התלמידים הבחינו בקשר ללא עידוד המורה? ההתייחסות לסדר האירועים אפשרה לסטודנטים לדון בתרחישים שונים שיכולים לקרות בשיעור ולבחון את ההשלכות של כל תרחיש כזה.

דיון וסיכום

המחקר הנוכחי מראה שלושה סוגים שונים של דמיון המתאפשרים מתוך דיון על תמונות ה־RTA: דמיון באמצעות התייחסות כללית להוראה, דמיון באמצעות התייחסות לפעולות הוראה־למידה ודמיון באמצעות התייחסות לזמן ולסדר הדברים. הסיפורים המדומיינים שיצרו הסטודנטים אפשרו להם ליצור תמונות על "עולם ההוראה" בכלל, ועל עולם ההוראה המעודדת חקירה בפרט. באמצעות תמונות אלו יכלו הסטודנטים לדמיין כיצד הפרקטיקות מעודדות החקירה יכולות "להיראות" ולדמיין את ההוראה שלהם באמצעות פרקטיקות אלה. בנוסף, באמצעות התמונות והתסריטים המדומיינים, ניתן לסטודנטים אוצר מילים נוסף לחשוב באמצעותו ובכך להרחיב את הגדרת ההוראה שלהם. תהליכים אלו זימנו עבור הסטודנטים הזדמנויות שונות באמצעותן הם יכלו לקדם את תהליך עיצוב זהותם כמורים מעודדי חקירה (Wenger, 1998). יצירת הזדמנויות למידה אלו משמעותית במיוחד כאשר מדובר בסוג הוראה המורכבת ללמידה ויישום, כמו ההוראה מעודדת החקירה (Heyd-Metzuyanim et al., 2019). רבות דובר על הצורך בקישור בין עולם ההכשרה לבין הפרקטיקות בכיתה, בעיקר בהקשר של צילומי וידאו (Sherin, 2004). יחד עם זאת, לסרטים ישנם מגבלות בכך שהם מגבילים את יכולת הדיון למה שהתרחש בסרטון, לרוב במשך דקות ספורות. ה־RTA מהווה מעין אמצעי־ביניים. מצד אחד, הוא מתאר (בתמצות ויזואלי רב) שיעורים אמיתיים. מצד שני, הדיון בו מאפשר, בעזרת הדמיון, העלאת תרחישים שונים ודיון ברזולוציות שונות של פרקטיקות הוראה מעודדות חקירה.

רשימת מקורות

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: A practical guide through qualitative analysis*. sage.

Cohen, D. K. (1990). A Revolution in One Classroom: The Case of Mrs. Oublier. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 12(3), 311–329.

Heyd-Metzuyanim, E., Nachlieli, T., Weingarden, M., & Baor, R. (2020). Adapting a professional development program for cognitively demanding instruction across shifting contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 104(3), 385–403.

Heyd-Metzuyanim, E., Smith, M., Bill, V., & Resnick, L. B. (2019). From ritual to explorative participation in discourse-rich instructional practices: a case study of teacher learning through professional development. *Educational Studies in Mathematics*, 101(2), 273–289.

Ma, J. Y., & Singer-Gabella, M. (2011). Learning to teach in the figured world of reform mathematics: Negotiating new models of identity. *Journal of Teacher Education*, 62(1), 8-22

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. New York: Cambridge University Press.

Sherin, M. G. (2004). New perspectives on the role of video in teacher education. *Advances in Research on Teaching*, 10, 1–27.

Weingarden, M., Heyd-Metzuyanim, E., & Nachlieli, T. (2019). The realization tree assessment tool – examining explorative participation in mathematics lessons. *Journal of Mathematical Behavior*.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: Learning, meaning and identity*. New York, NY: Cambridge University Press.

מודל לאפיון אירועים קריטיים שזוהו על ידי סטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשית

סיגל רותם, מיכל איילון

אוניברסיטת חיפה

מבוא תיאורטי ושאלת מחקר

הוראה כוללת רגעים בלתי צפויים, למשל, כאשר תלמידה שואלת שאלות, מביעה רעיונות מתמטיים מפתיעים או מצביעה על סתירה מתמטית. רגעים אלה מהווים הזדמנויות עבור המורה להעמיק בתוכן המתמטי הנידון בשיעור, ליצור קשרים בין נושאים מתמטיים שונים ולהרחיב את האופק המתמטי של התלמידים בכיתה מעבר למשימה בה עוסקים בשיעור. תגובה "בזמן אמת" של מורים ל־'אירועים קריטיים' כאלה, יכולה לקדם את ההבנה והלמידה של התלמידים (Stockero et al., 2019).

תכניות להכשרת מורים משתמשות באירועים קריטיים כדי לפתח את יכולת שימת הלב (Noticing) של מורים לחשיבה מתמטית של תלמידים ונמצא כי הכשרה של מורים המשתמשת באירועים קריטיים מסייעת בשיפור שימת הלב לחשיבה המתמטית של תלמידים (למשל, Sherin & van Es, 2009) וביצירת קשרים שסטודנטים להוראה עושים בין התיאוריה לבין הפרקטיקה של ההוראה (למשל, Diamantis et al., 2011).

במרבית התכניות המשתמשות באירועים קריטיים כמוקד לניתוח משותף ולדיון, החוקרים או מובילי התכניות מביאים את האירועים לצפייה ולדיון (למשל, Sherin & van Es, 2009). המחקר הנוכחי נבנה על התפישה כי למידה של הוראה צריכה להיעשות בסביבה אותנטית, המדמה ככל האפשר את הפרקטיקה אליה יידרשו הסטודנטים כשילמדו בפועל בכיתות (למשל, Grossman et al., 2009).

כחלק מתפישה זו, סטודנטים להוראה התבקשו להביא בעצמם את האירועים הקריטיים משיעורים בהם צפו או לימדו. המחקר המוצג כאן הינו חלק ממחקר מקיף שנועד ללמוד על הלמידה של סטודנטים להוראה במהלך תכנית בה אירועים קריטיים הם כלי מרכזי בהכשרה. כצעד ראשון, רצינו ללמוד מה מאפיין אירועים קריטיים שסטודנטים להוראה זיהו כאירועים קריטיים.

בספרות קיימות הגדרות שונות למושג 'אירוע קריטי'. כאשר ניגשנו לנתח את האירועים הקריטיים שזיהו הסטודנטים, מצאנו כי ההגדרות הקיימות אינן מספיקות וכי יש צורך בבניית מודל כולל ורחב יותר המאפיין אירוע קריטי. למשל, אחת ההגדרות המקובלות בספרות הינה של סטוקרו וחבריה (Stockero et al., 2019) הרואים באירוע קריטי הזדמנות פדגוגית להיבנות על החשיבה המתמטית של תלמידים ולעזור להם להבין טוב יותר רעיונות מתמטיים חשובים. הם מסווגים אירועים קריטיים לפי סוג האמירה של התלמיד באירוע, כמו שגיאה של תלמיד, התמודדות של תלמיד עם סתירה מתמטית וכדומה. יחד עם זאת, אירוע קריטי, כפי שעולה במחקרים אחרים, מאופיין בהיבטים נוספים כמו הפדגוגיה הננקטת על-ידי המורה (Estapa et al., 2018) או היבטים רגשיים של התלמידים. לפיכך, נרצה שההגדרה של אירוע קריטי תכלול היבטים נוספים שיציגו את המורכבות הקיימת בלמידה ובהוראה של מתמטיקה, ושנתפשים בעינינו, כחוקרות וכמורות־מורים, כראויים לשימת הלב של סטודנטים להוראה.

המחקר הנוכחי מנסה לענות על צורך זה ומטרתו היא פיתוח של מודל לאפיון אירועים קריטיים שזוהו על ידי סטודנטים להוראת מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשית בכיתות. המודל נבנה באופן תיאורטי ואמפירי, על סמך דיווחים של סטודנטים להוראה על אירועים קריטיים שזוהו על־ידיהם במהלך ההכשרה המעשית שלהם במסגרת תכנית הקלי"ם־5 עליה יורחב בהמשך. שאלת המחקר המוצגת במאמר הנוכחי הינה: *מהם המאפיינים העיקריים של אירועים קריטיים שנבחרו על ידי סטודנטים להוראה בעת הצפייה ו/או הוראה בשיעורי מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשית?*

מתודולוגיה

המחקר נערך במסגרת תכנית הקלי"ם־5 (הכשרה קלינית להוראה ייחודית מתמטיקה 5 יח"ל) אשר פעלה בין השנים 2017-2020 בחוג לחינוך מתמטי באוניברסיטת חיפה, במטרה להכשיר סטודנטים להוראת חמש יחידות לימוד בבית הספר התיכון. כדי לענות על שאלת המחקר נותחו 78 דיווחים כתובים של 20 סטודנטים להוראה שהשתתפו בתכנית במהלך השנים 2017-2019. הדיווחים התמקדו באירועים קריטיים שזוהו על ידי הסטודנטים תוך כדי הצפייה וההוראה בשיעורי מתמטיקה במהלך ההתנסות המעשית בבתי הספר. דיווח כתוב על אירוע קריטי כלל שני חלקים מרכזיים (בהתבסס על Jacobs, Lamb & Philipp, 2010): תיאור האירוע (כולל הקשרו) וניתוח האירוע מנקודת מבטם של התלמיד והמורה (כולל הצעת דרך הוראה אלטרנטיבית) (לפרטים נוספים: Rotem, Ayalon & Weissman, 2019). במאמר זה נתמקד בהצגת הממצאים העולים מניתוח החלק הראשון של הדיווח הכתוב – תיאור האירוע והקשרו.

ניתוח הנתונים התבצע באופן הבא: תחילה נעשה ניתוח אינדוקטיבי בו זוהו מאפיינים שחזרו על עצמם בין כלל האירועים שדווחו. לאחר מכן נמצאה הקבלה בין המאפיינים שזוהו בניתוח האינדוקטיבי לבין מאפיינים הקיימים בספרות (Sherin & van Es, 2009) ולפיכך עודנו הקטגוריות ונבנה מודל (מוצג בחלק הבא). לבסוף, נותחה שוב אסופת הנתונים בהתאם למודל שנבנה בשלב הקודם בהתאם לקטגוריות המעודנות.

המודל מוצג ומודגם כאן באמצעות חקר מקרה של סטודנטית להוראה, רשידה, שהשתתפה בתכנית כאשר למדה לקראת תעודת הוראה בשנת הלימודים האקדמית 2017-2018. רשידה הינה סטודנטית לתואר ראשון דו־חוגי בחינוך ובמתמטיקה והיא השתתפה בתכנית הקלי"ם־5 במהלך השנה השלישית ללימודיה. בסך־הכל נותחו שלושה אירועים קריטיים שרשידה זיהתה וניתחה במהלך התכנית. האירועים הקריטיים עליהם דיווחה רשידה דומים במאפייניהם לאירועים של סטודנטים נוספים בתכנית ולכן האירוע שלה מאפשר לנו להדגים את ממצאי הניתוח.

ממצאים ודיון

המודל שנבנה במחקר זה מורכב משלושה צירים (**איור 1**), כאשר כל ציר מייצג את אחת הקטגוריות הראשיות של המודל: (1) מוקד האירוע הקריטי – מתמטיקה, פדגוגיה או מתמטיקה ופדגוגיה יחד, (2) משתתפי האירוע הקריטי – תלמידים, מורה או מורה ותלמידים יחד, ו־(3) היבטים של למידה והוראה של מתמטיקה: היבט קוגניטיבי, היבט אפקטיבי (רגשי) או היבט חברתי. חיתוך של שלוש קטגוריות ראשיות, למשל קוגניטיבי־תלמידים־מתמטיקה, יוצר תת־קטגוריה של המודל. בחלק זה נדגים ניתוח לפי המודל, כאשר את המודל במלואו על כל תת־הקטגוריות שלו נציג בהרצאה.

איור 1

מודל לאפיון אירועים קריטיים

לשם נוחות העברנו את המודל התלת־ממדי לייצוג טבלאי. עמודות הטבלה מייצגות את משתתפי האירוע ושורותיה מייצגות את מוקד האירוע. ההיבטים של למידה והוראה: קוגניטיבי, אפקטיבי וחברתי מיוצגים על ידי צבעים באופן הבא: קוגניטיבי אפקטיבי חברתי

איור 2 מציג דוגמה לשימוש במודל לניתוח מאפייני האירוע הקריטי שהובא על-ידי רשידה. הסוגריים המרובעים כוללים אינדקס המפנה לתת הקטגוריה המתאימה ב**איור 2**, כפי שזוהתה בניתוח האירוע. בצד השמאלי של האיור ניתנות הגדרות לקטגוריות הרלוונטיות. יש לציין שההצעה הכתובה כאן מדגימה ודנה רק בקטגוריות שעלו בניתוח האירוע שהובא על-ידי רשידה. בהצגה בכנס נתאר ונדגים את כלל הקטגוריות במודל.

האירוע שכתבה רשידה

נושא השיעור: משוואת המשיק.
האירוע התרחש במהלך תרגול הנושא בכיתה. התלמידים עבדו על הבעיה הבאה:
נתון ישר $y=-2x-9$, המשיק לפונקציה הוא $y=-x^2+b$. יש למצוא את ערכו של הפרמטר b.
התלמידים ענו על השאלה בדרך הבאה: שיפוע המשיק=נגזרת הפונקציה והמשיכו משם [1]. אז שאל המורה: האם מישהו פתר בדרך אחרת? [2], [4]. אף אחד לא הצביע, לכן המורה נתן זמן לחשיבה [2]. לאחר זמן מה ענתה תלמידה: השוויתי בין ישר המשיק ובין הפונקציה כדי למצוא את נקודת החיתוך של הישר עם הפונקציה. הישר משיק לפונקציה ולכן יש רק נקודת חיתוך אחת, כלומר כאשר $\Delta = 0$ [1].
המורה: תשובה מאוד יפה ומעניינת [3]. האם זה נכון לכל פונקציה, כלומר האם אפשר לפתור בדרך הזו לכל פונקציה נתונה? [4]

כפי שרואים ב**איור 2**, באירוע משתתפים גם המורה וגם התלמידים, ויש בו התמקדות באמירות המתמטיות של התלמידים ובפדגוגיה הננקטת על-ידי המורה. ראשית, מתוך הניתוח עולה כי ניתן לאפיין את האירוע בתת־הקטגוריה שהיא תוצאת החיתוך של השלשה **תלמידים, מתמטיקה והיבט קוגניטיבי** (מסומן ב־1 באירוע ובטבלה) ומוגדרת כ*התלמידים הציעו מגוון (יותר מאחד) רעיונות, מושגים, ייצוגים, אסטרטגיות לפתרון או שיקולים כחלק מאסטרטגיות לפתרון לפעילות המתמטית הנדונה באירוע.*

איור 2

שימוש במודל לניתוח המאפיינים של האירוע שהובא על-ידי רשידה.

משתתפי האירוע / מוקד האירוע	מורה	תלמידים	משולב: מורה ותלמידים
מתמטיקה		קוגניטיבי [1]	
פדגוגיה	קוגניטיבי [2]	—	אפקטיבי [3]
משולב: מתמטיקה ופדגוגיה		—	חברתי [4]

אינדקס	שם הקטגוריה	הגדרה
1	תלמידים-מתמטיקה-קוגניטיבי	התלמידים הציעו מגוון (יותר מאחד) רעיונות, מושגים, ייצוגים, אסטרטגיות לפתרון או שיקולים כחלק מאסטרטגיות לפתרון לפעילות המתמטית הנדונה באירוע.
2	מורה-פדגוגיה-קוגניטיבי	המורה השתמש במגוון שיטות הוראה (יותר מאחת).
3	משולב מורה תלמידים-פדגוגיה-אפקטיבי	המורה התייחס לרגשות, תחושות, מוטיבציה, ביטחון של התלמידים בהוראה כדי לקדם את מעורבות התלמידים.
4	משולב מורה תלמידים-משולב מתמטיקה פדגוגיה-חברתי	המורה קידם וחיבר בין רעיונות התלמידים בדיון כך שרעיון אחד נבנה על רעיון אחר.

באירוע זה התלמידים מציעים שתי אסטרטגיות לפתרון הבעיה. האסטרטגיה הראשונה מתייחסת לכך שהנגזרת בנקודה שווה לשיפוע המשיק. האסטרטגיה השנייה מתייחסת לכך שהבעיה הינה מקרה פרטי של פונקציה ריבועית שלה נקודת חיתוך אחת עם המשיק בנקודה, ולכן ניתן למצוא את המשיק דרך מציאת נקודות החיתוך של המשיק עם הפונקציה. מאפיין נוסף שעלה מתוך הניתוח, המוגדר באמצעות החיתוך של השלשה **מורה, פדגוגיה והיבט קוגניטיבי** (מסומן ב־2 באירוע ובטבלה) הוא תת־הקטגוריה העוסקת במגוון שיטות ההוראה בהן השתמש המורה באירוע. באירוע זה המורה שאל את התלמידים אם יש להם רעיון נוסף לפתרון. לאחר שלא קיבל תשובה מידית, הוא נתן לתלמידים זמן לחשוב. ניתן לזהות כאן שתי אסטרטגיות הוראה – הבקשה לרעיונות נוספים ומתן זמן לחשיבה – שככל הנראה אפשרו את העלאת הרעיון של התלמידה. המאפיין השלישי המופיע באירוע זה (מסומן ב־3 באירוע ובטבלה) המוגדר באמצעות החיתוך של השלשה **מורה־תלמידים, פדגוגיה והיבט אפקטיבי** הוא תת־הקטגוריה העוסקת בהתייחסות המורה לרגשות, תחושות, מוטיבציה, ביטחון של התלמידים בהוראה ודרכה המורה מקדם את מעורבות התלמידים. ניתן לראות בתגובת המורה "תשובה מאוד יפה ומעניינת" וכן בפנייתו לשאר תלמידי הכיתה בבקשה להתייחסות לרעיון של התלמידה, אמצעי פדגוגי בעזרתו המורה נותן חיזוק חיובי לתלמידה ביחס לעשייה המתמטית שלה. המאפיין הרביעי שעלה באירוע הינו תוצאה של חיתוך השלשה **מורה־תלמידים,**

פדגוגיה־מתמטיקה וחברתי (מסומן ב־4 באירוע ובטבלה).לאורך האירוע, ובמיוחד בבקשתו של המורה משאר תלמידי הכיתה לבחון את הרעיון של התלמידה ולבדוק האם ניתן לעשות הכללה לפונקציות שאינן ריבועיות, המורה נקט בפעולות המאפשרות קידום של רעיונות שונים בשיעור כדי לבסוף להיבנות עליהם ולחבר ביניהם, באופן שיתופי במליאת הכיתה.

הניתוח שהודגם כאן נעשה עבור 78 אירועים שדווחו על ידי הסטודנטים להוראה שהשתתפו בפרויקט. תהליך הניתוח האמפירי, לצד ההסתמכות על התיאוריה, הובילו לפיתוחו של המודל. המודל מהווה כלי מחקרי בכך שהוא מאפשר לבחון את האירועים באופן ה'תופס' את מורכבות ההוראה והלמידה בשיעורי המתמטיקה. שימוש במודל לניתוח של אירועים המובאים על-ידי סטודנטים להוראה ולפרשנויות הניתנות על־ידיהם לאירועים (בכך לא עסקנו במאמר זה) לאורך זמן יוכל לסייע לנו ללמוד על התפתחותם המקצועית. כמו כן שימוש במודל בהכשרת מורים יאפשר פיתוח של שימת הלב של סטודנטים להוראה להיבטים המגוונים של ההוראה והלמידה של המתמטיקה, ובכך מהווה בסיס לכלי לפיתוח מקצועי של מורים. בכנס יוצג המודל במלואו, יובאו דוגמאות נוספות ויידונו האפשרויות והמגבלות הטמונות במודל.

רשימת מקורות

Estapa, A. T., Amador, J., Kosko, K. W., Weston, T., de Araujo, Z., & Aming-Attai, R. (2018). Preservice teachers' articulated noticing through pedagogies of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *21*(4), 387-415.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record, 111*(9), 2055-2100.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41(2)*, 169-202.

Potari, D., Psycharis, G., Kouletsi, E. & Diamantis, M. (2011). Prospective mathematics teachers' noticing of classroom practice through critical events. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2798-2807). Rzeszów: University of Rzeszów.

Rotem, S., Ayalon, M., & Weissman, S. (2019). Pre-service mathematics teachers interpret observed teachers' responses to students' statements. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the 11th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3473-3480). Utrecht, the Netherlands: Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.

Sherin, M. G., & Van Es, E. A. (2009). Effects of video participation on teachers' professional vision. *Journal of Teacher Education*, 60(1), 20-37.

Stockero, S. L., Leatham, K. R., Ochieng, M. A., Van Zoest, L. R., & Peterson, B. E. (2019). Teachers' orientations toward using student mathematical thinking as a resource during whole-class discussion. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1-31.

שגרות הנחייה של עבודה בקבוצות בשיעור מתמטיקה

נדב ארנפלד, אילנה הורן

אוניברסיטת ונדרבילט

מבוא

המטרה של מחקר זה היא להבין טוב יותר את המורכבות של הנחיית עבודה בקבוצות בשיעור מתמטיקה, ואת מגוון האפשרויות למהלכים פדגוגיים שונים. אנו מגדירים את המושג שגרות הנחייה (groupwork monitoring routines) ומתארים בעזרתו את ההוראה של שמונה מורים ומורות בחט"ב ותיכונים במערב ארה"ב. המחקר מתמקד בשלב של השיעור ש-Smith and Stein (2011) כינו "ניטור" (monitoring). זהו השלב בשיעור שבו התלמידים עובדים בקבוצות והמורים עוברים בין הקבוצות. הניתוח מתמקד במהלכים פדגוגיים בארבעה שלבים של השיחות בין המורים לקבוצות תלמידים: איך המורים יוזמים שיחות, איך הם מצטרפים לשיחות, מה המוקד של השיחות, וכיצד הם מסיימים שיחות. (initiation-entry-focus-exit). בנוסף, בדקנו את מידת השתתפות התלמידים לאורך השיחות.

רקע תיאורטי ושאלת המחקר

למידה שיתופית של מתמטיקה בקבוצות קטנות טומנת בחובה הבטחות וסיכונים, הן ברובד האקדמי והן ברובד החברתי (Cohen & Lotan, 2014; Horn, 2012; Smith & Stein, 2011). לדוגמא, היא מאפשרת יצירת משמעות וקשרים בין מושגים מתמטיים, אבל היא גם יכולה לתרום להעמקת סטטוסים חברתיים ואקדמיים. אם כך, תפקיד המורה בזמן שהתלמידים עובדים בקבוצות קטנות מלווה במתח בין יצירת אוטונומיה ללמידה, לבין התערבות, תמיכה והכוונה של שיחות התלמידים. מחקרים שונים מספקים שיטות שונות (ואף סותרות) על הרצף הזה. המטרה של המחקר המובא כאן איננה להכריע מה השיטה "הטובה ביותר" להנחייה. להבדיל, אנחנו טוענים שבכל שיטה שבה יבחרו המורים להשתמש, המתח בין אוטונומיה לתמיכה תמיד יהיה קיים וידרוש את שיקול הדעת הפדגוגי של המורה (Horn, 2020; Lefstein & Snell, 2013). אם כן, המטרה שלנו היא להבין טוב יותר דווקא את המורכבות של הנחיית עבודה בקבוצות, את מרחב האפשרויות למהלכים פדגוגים, את הדומה והשונה ביניהם, ואת ההשלכות הפוטנציאליות שלהם על הלמידה השיתופית של התלמידים בתנאים שונים. מתוך המטרה הזו פיתחנו מסגרת מושגית למורים וחוקרות לחשיבה על הנחיית עבודה בקבוצות קטנות בשיעור מתמטיקה (Ehrenfeld & Horn, 2020; Ehrenfeld et al., 2020). שאלת המחקר המוצג כאן הינה *מהו מגוון השגרות שבהן המורים במחקר מנחים עבודה בקבוצות?*

מתודולוגיה

הנתונים נאספו כחלק מפרויקט מחקר בן ארבע שנים שעוסק בלמידה של מורים למתמטיקה (Horn, 2020). בפרויקט, שכעת נמצא בשנתו האחרונה, אנחנו עובדים עם צוותי מורים בחט"ב ותיכונים במערב ארה"ב סביב דילמות פדגוגיות שהם בוחרים. המורים כולם בעלי ניסיון של מעל חמש שנים והם שייכים לקהילת פיתוח מקצועי עם הזדמנויות למידה רבות מהממוצע (לדוגמא, נחשפו למגוון

אסטרטגיות להנחיית עבודה בקבוצות). ראשית, אנו מתעדים את השיעורים של המורים בעזרת שתי מצלמות (אחת מרחבית, ושניה גו-פרו על ראש המורה) וארבעה מיקרופונים בארבע קבוצות תלמידים. לאחר מכן, אנחנו צופים עם צוות המורים בקטעים נבחרים שרלוונטיים לשאלות ולתחומי העניין של המורה המלמד. במחקר שמוצג כאן אנו משתמשים בנתונים מהכיתות בלבד, ללא השיחות עם המורים בזמן הצפייה בוידאו. בכדי לענות על שאלת המחקר בחרנו שמונה שיעורים של שמונה מורים שונים מהשנה הראשונה למחקר. הקריטריון לבחירתם היה שהם כללו עבודת תלמידים בקבוצות קטנות במשך לפחות 20 דקות ברצף. סה"כ ניתחנו 278 דקות של וידאו שכוללות 238 שיחות של מורים עם קבוצות תלמידים מרגע שהמורה ניגש לקבוצה ועד שהוא עוזב אותה. עבור הניתוח אנחנו מגדירים את המושג שגרות הנחייה של עבודה בקבוצות (groupwork monitoring routines) בהסתמך על עבודה קודמת בנושא שגרות שיח (Lavie et al., 2019) ועל ידי ניסוח מסגרת מושגית סביב חמש השאלות בטבלה 1.

טבלה 1

5 שאלות להתבוננות בשגרות הנחייה של עבודה בקבוצות

שלבים	שאלות	דוגמאות
יוזמה initiation	איך המורים מסתובבים בין הקבוצות ומי יוזם את השיחות?	המורה הולך בין הקבוצות בסדר קבוע ויוזם שיחה עם כל קבוצה
הצטרפות entry	כיצד המורים מצטרפים לשיחה?	המורה מקשיב ואז שואל, או שואל את התלמידים על מה הם עובדים
מוקד focus	מה המוקד של השיחה?	שיחה על תוצאות, המללת תהליכי חשיבה, עיסוק בנורמות השתתפות.
סיום exit	כיצד המורים מסיימים את השיחה?	סיום פתוח עם משהו לחשוב עליו, סיום סגור עם הוראות להמשך.
השתתפות participation	מי בקבוצה שותף לשיחה?	שיחה עם כל התלמידים כקבוצה, עם תלמיד מסוים או חלקם .

ממצאים

נדגים כל שלב מטבלה 1 על ידי השוואה בין שני מורים עם שגרות שיחה שונות. מפאת המקום, נפרט בעיקר על השלב הראשון בתור דוגמא, ונציג את שאר השלבים בכלליות וללא התצוגה הגרפית. דיון מורחב בדילמות הפדגוגיות בכל שלב ניתן למצוא ב- Ehrenfeld and Horn (2020).

יוזמה

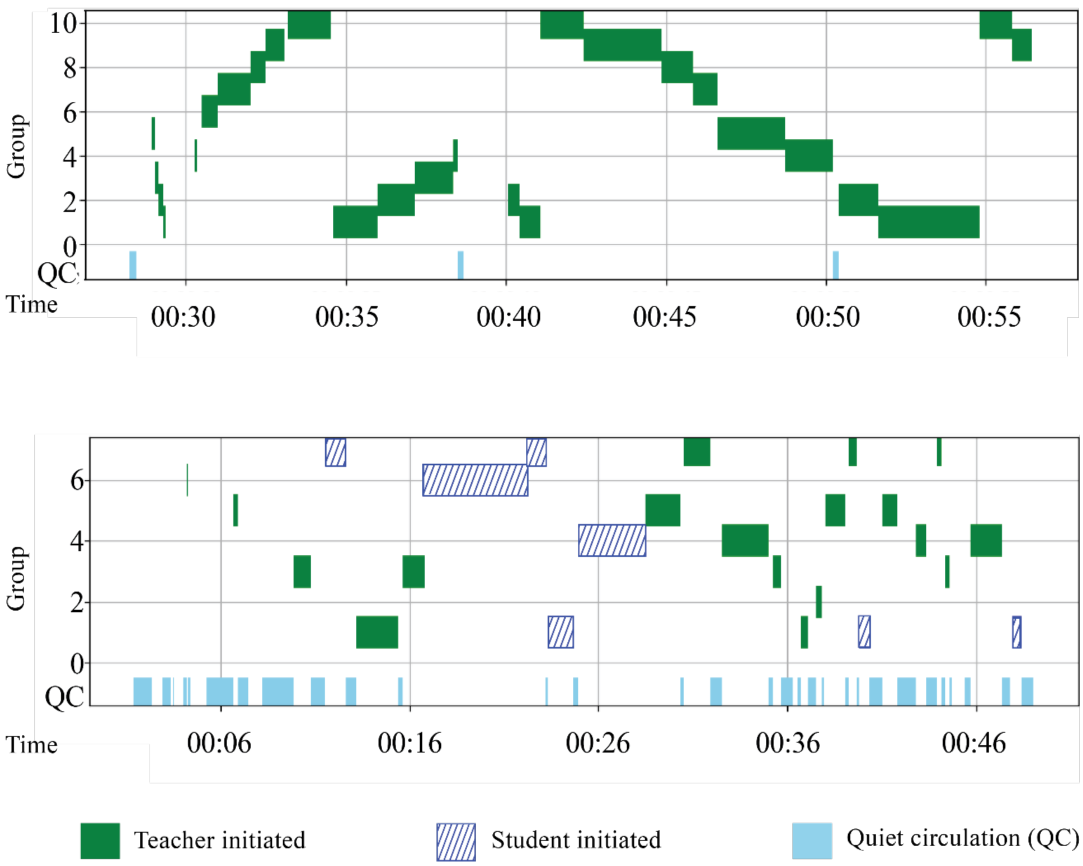
בשלב זה בדקנו איך המורות ניגשות לקבוצות. לשם הדוגמא נשווה בין שגרות היוזמה של ורוניקה וליזט. איור 1 מתאר הנחיית עבודה בקבוצות בשתי הכיתות, כאשר הציר האופקי מייצג את הזמן בשיעור והציר האנכי מייצג את מספר הקבוצה שאיתה המורה משוחחת. כל מלבן מייצג שיחה בין המורה לקבוצה מסוימת — מלבן ירוק כאשר המורה יזמה את השיחה ומלבן כחול עם פסים כאשר התלמידים יזמו את השיחה. השורה התחתונה בכחול בהיר מתארת הליכה שקטה של המורה בין

הקבוצות. ניתן לראות שורוניקה באופן שיטתי הלכה בין הקבוצות בסדר קבוע ויזמה שיחה עם כל קבוצה. לעומתה, ליזט הלכה בין הקבוצות (הקשבה ללא דיבור) 31% מהזמן, כאשר היא או התלמידים יזמו את השיחות.

כאמור המטרה בשלב זה היא לא לייצר שיפוט נורמטיבי על אחת התבניות כטובה יותר בכל סיטואציה. שגרת היוזמה של ורוניקה (למעלה) מאפשרת חלוקה שווה יותר של זמן הניטור של המורה בין הקבוצות השונות. תבנית זו גם מאפשרת ודאות שהמורה לא "פיספסה" אף קבוצה. זאת, בניגוד לליזט שניגשה לקבוצה מספר 2 רק פעם אחת (ראו איור 1) וגם זה לזמן קצר יחסית. מצד שני, בעזרת המיקרופונים בקבוצות התלמידים יכולנו להבחין שורוניקה ניגשת לקבוצות גם כשהתלמידים מנהלים שיחה מתמטית טובה, ולעיתים עצם ההתערבות שלה מגבילה את השיחה. לדוגמא, כשורוניקה ניגשה לקבוצה 8 ב 32:00 (ראו איור 1), התלמידים שוחחו על הבעיה "האם הסכום של שלושה מספרים עוקבים תמיד מתחלק בשלוש?". תלמיד אחד כתב על הלוח '3,5,9' ותלמיד שני אמר: "הם לא מספרים עוקבים". ורוניקה הצטרפה לשיחה והגדירה 'מספרים עוקבים' למרות שייתכן שלקבוצה היו את המשאבים להמשיך בעבודה בעצמם. לעומתה, ליזט הסתובבה יותר בין הקבוצות ללא דיבור, הקשיבה יותר לשיחות התלמידים, וכך בחרה לאיזו שיחה להצטרף. נראה אם כן שלתבניות יוזמה שונות יתרונות ומגבלות שונות, ועל המורים להתאים אותן לסיטואציות שונות כמו מטרות המורה, הסידור הפיזי של כיתה, מספר התלמידים, גיל התלמידים, סוג המשימה ועוד.

איור 1

יוזמה: איך המורות ורוניקה (מעלה) ו-ליזט (מטה) הסתובבו בין הקבוצות ומי יזם את השיחות?



הצטרפות ומוקד

בשלב ההצטרפות לשיחה הייתה עקביות יחסית עבור שבעה מתוך שמונה המורים, בעיקר תוך 'הקשבה או בקשת סיכום'. (המורה הנוסף בעיקר ענה על שאלות תלמידים). בשלב המוקד, גילינו שלושה מהלכים מתמטיים ושלושה מהלכים לא מתמטיים. המהלכים המתמטיים היו: (1) המללת חשיבה (2) שיחה על תוצאות (3) רמזים והכוונה. המהלכים הלא-מתמטיים היו: (4) נורמות השתתפות (5) עיסוק טכני במשימה (6) הערה קצרה או טכנית. הממצאים בשלב מוקד השיחה היו מגוונים יותר. לדוגמא, ברידג'יט דיברה על 'נורמות השתתפות' יותר ממה שדיברה על מתמטיקה. כשתלמיד שאל שאלה, היא מיד בדקה שהוא שאל קודם לכן את חבריו לקבוצה, וכיוונה אותם להשתמש אחד בשניה כמשאב. לחלופין, אצל המורה בראד, 11 מתוך 13 השיחות התחילו ב'המללת תהליכי החשיבה של התלמידים', ולאחר מכן התייחסו ל"רמזים והכוונה'.

סיום

בשלב זה בדקנו כיצד המורים מסיימים את השיחה. הבדלנו בין סוף פתוח שבו המורים משאירים את התלמידים עם משהו לחשוב עליו יחד, לבין סוף סגור שבו המורים אומרים לתלמידים מה נכון ומה לא או נותנים הוראות ברורות להמשך. לדוגמא נשווה בין בראד וליזט. כפי שראינו, שגרת ההנחייה של בראד התחילה בהמללת השיחות והמשיכה לרמזים והכוונה. בשלב זה מצאנו שכל 13 השיחות של בראד עם הקבוצות נסתיימו בסוף סגור. לעומתו, ליזט הקפידה לסיים את רוב השיחות בסוף פתוח. (ההצגה הגרפית הושמטה מטעמי מקום אך תוצג בכנס).

השתתפות

בשלב זה בדקנו האם המורה מדבר עם כל התלמידים כקבוצה, או עם חלקם. כיוון שהשתתפות בשיחה איננה חייבת להיות בדיבור, הסתכלנו גם על שפת גוף ומבט. לדוגמא, נשווה בין ברידג'יט ולי. על אף ש-לי לרוב שוחח עם כל תלמידי הקבוצה, הוא עשה זאת תמיד בנפרד, ואף פעם לא יחד כקבוצה. לעומתו, ברידג'יט, שכזכור דיברה עם הקבוצות על נורמות השתתפות יותר ממתמטיקה, הקפידה הלכה למעשה שכל השיחות שלה, תמיד, יתנהלו בהשתתפות כל חברי הקבוצה. (ההצגה הגרפית הושמטה מטעמי מקום אך תוצג בכנס).

דיון וכיוונים להמשך

המסגרת המושגית המתוארת כאן (initiation-entry-focus-exit and participation) יכולה לשמש מורים, מורי מורים, וחוקרות כמסגרת לתיאור וניתוח של עבודת המורה בזמן שהתלמידים עובדים בקבוצות קטנות. בתקציר זה, הדגמנו שימוש כזה במחקר שחושף מגוון של מהלכים פדגוגים ודילמות סביבם. בנוסף, המסגרת המושגית משמשת אותנו כיום בהשתלמויות מורים (ראו קישורים לחומרי עזר להשתלמויות בעברית ובאנגלית). כיוון מחקר ראשון לעתיד הוא לבדוק באיזה אופן המסגרת תומכת בלמידה של המורים. במחקר המשך נוסף אנו מנתחים את שיחות התלמידים באותם שמונה שיעורים, ובודקים כיצד שגרות ההוראה השונות משפיעות על שיחות התלמידים בקבוצות קטנות (Ehrenfeld et al., 2020). אנחנו מקווים שהמסגרת המושגית תתמוך במורים וחוקרות שמעוניינים ומעוניינות בהבנה מורכבת יותר של שגרות הנחייה של עבודה בקבוצות בשיעור מתמטיקה, בכדי לקדם את ההבטחות האקדמיות והחברתיות של למידת מתמטיקה שיתופית.

רשימת מקורות

Cohen, E. G., & Lotan, R. A. (2014). *Designing groupwork: strategies for the heterogeneous classroom (3rd ed.)*. New York, NY: Teachers College Press.

Ehrenfeld, N., & Horn, I. S. (2020). Initiation-entry-focus-exit and participation: a framework for understanding teacher groupwork monitoring routines. *Educational Studies in Mathematics, 103*, 251–272. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09939-2.

Ehrenfeld, N., Horn, I., Moses, J., & Garner, B., (2020). Teacher groupwork monitoring routines and the nature of students' conversation in small groups. *Proceedings of the 14th International Conference of the Learning* Sciences (pp. 1863-1870). Nashville, TN. https://repository.isls.org//handle/1/6465.

Horn, I. S. (2012). *Strength in numbers: collaborative learning in secondary mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Horn, I. S. (2020). Supporting the development of pedagogical judgment: connecting instruction to contexts through classroom video with experienced mathematics teachers. *In International handbook of mathematics teacher education* (pp. 289–310). Leiden: Brill.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9817-4.

Lefstein, A., & Snell, J. (2013). *Better than best practice: developing teaching and learning through dialogue.* New York, NY: Routledge.

Smith, M. S., & Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

מעברי ידע ובעלי תפקידים גלויים וסמויים בין ובתוך שתי סביבות למידה: מליאה ועבודה בזוגות

עפרה עפרי, מיכל טבח

אוניברסיטת תל־אביב

מבוא

סביבות הלמידה הקיימות בכיתה הן מגוונות, כמו מליאה, עבודה בזוגות או בקבוצות. מעברי ידע מתרחשים בין סביבות הלמידה ובתוכן. מכאן עולה השאלה: כיצד עובר ידע מתמטי בין ובתוך סביבות הלמידה? מיהם בעלי התפקידים האחראים על תהליכים אלה? במאמר זה יוצג חלק ממחקר רחב יותר העוקב אחרי תהליכי למידה ומהלכי הוראה בכיתת מתמטיקה בשלוש סביבות למידה: במליאה, בזוגות בכיתה ובזוגות בסביבה משולבת מחשב. בעבר, חשפנו כי בדיונים של מליאת הכיתה קיים רובד סמוי (עפרי וטבח, 2017). במאמר זה נציע הגדרה תיאורטית חדשה שגובשה למושג *מליאת הכיתה* וממצאים חדשים לגבי מאפיינים של *מעברי ידע* ו*בעלי תפקידים* בסביבות למידה אלו. על כן, התמקדנו בשאלה: מהם המאפיינים של מעברי הידע ושל בעלי התפקידים בין ובתוך סביבות הלמידה בשיעורי מתמטיקה בנושא פונקציה ריבועית?

רקע תיאורטי

בשני העשורים האחרונים, חוקרים בחינוך מתמטי משלבים מספר גישות למחקר על מנת להפיק תובנות מהיבטים שונים לגבי התופעות הנחקרות והקשרים ביניהן. 'מארג תיאוריות' ('networking of theories') זה מדגיש את הערך המוסף של השלמת החסרונות או הפערים של גישה אחת באמצעות שימוש בגישה נוספת, אחת או יותר. שילוב גישות תיאורטיות מתודולוגיות הוביל להגדרת מבנים תיאורטיים: סוכני ידע, עוקבים ומעברי ידע (Tabach et al., 2020). הוגדרו שני בעלי תפקידים האחראים על מעברי הידע בסביבות הלמידה, במליאה, בקבוצה וביניהן: (1) *סוכן ידע* (knowledge agent) הוא דובר המבטא רעיון חדש שנאמר בפעם הראשונה בסביבת הלמידה; (2) *עוקבים לסוכן ידע* (followers) שמאפייניהם: דובר החוזר על הרעיון (repeat); דובר המתנגד לרעיון באופן מלא או חלקי (object); ודובר המרחיב ומפרט את הרעיון באופן מלא או חלקי (elaborate). נוסף על כך, הוגדרו מעברי ידע מתמטי בין סביבות הלמידה: מעבר ידע מהמליאה לקבוצה הוגדר כהורדה (download) ומעבר ידע מהקבוצה למליאה הוגדר כהעלאה (upload) (Hershkowitz et al., 2017).

במחקרים רבים נתפש המושג 'מליאה' כמובן מאליו, ולכן לא הוגדר על ידי חוקרים. יתר על כן, מחקרים רבים מנתחים את האינטראקציה במליאה בין המורה ללומדים כפעילות אחת, ובדרך כלל הם מתמקדים רק בפעילות המרכזית, מבלי להתייחס למורכבות האינטראקציה במליאה (Ernest et al., 2019). במחקר הנוכחי היתה התייחסות למורכבות המליאה והיא הוגדרה מחדש.

מטרת המחקר

מטרת המחקר היא לאפיין את מעברי הידע ואת בעלי התפקידים במליאה, בעבודה בזוגות (בסביבת כיתה ובסביבה ממוחשבת ודינמית) וביניהן, בנושא פונקציה ריבועית.

מתודולוגיה

המחקר נערך בקרב 30 תלמידי כיתה ט' שלמדו ברמה של ארבע-חמש יחידות במשך עשרת השיעורים הראשונים בנושא פונקציה ריבועית. כלי המחקר כללו צילומי וידאו של דיוני המליאה והקלטה קולית במקביל של שני זוגות תלמידים, שעבדו עם "עט חכם". הנתונים של שני זוגות התלמידים במליאה אורגנו ונותחו במקביל ובסנכרון עם השיח הטיעוני של שאר התלמידים במליאה, במתודולוגיה איכותנית אשר תוצג בהרצאה.

המעקב אחר מעברי הידע המתמטי בין סביבות הלמידה נותח בשני כיוונים: אם תלמיד הביע במילים בדו-שיח בזוג רעיון מתמטי חדש (שלא נשמע בעבר בדיון המרכזי במליאה) ומאוחר יותר נאמר על יד אחד מבני הזוג במליאת הכיתה, מעבר זה סומן *כהעלאה*. ובכיוון השני, אם בדיון בזוג אחד מבני הזוג אמר או התייחס לרעיון מתמטי חדש שנאמר במליאה, מעבר זה סומן *כהורדה*.

כן עסקנו בתיאור ובאפיון בעלי תפקידים האחראים על תהליכי ההתפתחות וההתפשטות של הידע בין סביבות הלמידה, הסוכנים והעוקבים. *סוכן ידע* סומן כמשתתף בדיון במליאה או בזוג שהעלה רעיון מתמטי חדש שנשמע בפעם הראשונה באחת מהסביבות ויש לו עוקב אחד לפחות. אם לסוכן הידע אין עוקב הוא סומן *כסוכן ידע בפוטנציה*. *עוקב* סומן כמשתתף שהתייחס לרעיון החדש שנאמר על ידי סוכן הידע, באותו טיעון, בטיעונים בהמשך באותו שיעור או במהלך השיעורים הבאים במליאה או בעבודה בזוגות. העוקבים לסוכן ידע סווגו על פי שלושת המאפיינים שצוינו ברקע התיאורטי (חוזר על רעיון, מתנגד לרעיון או מרחיב ומפרט רעיון).

ממצאים מרכזיים

ארגון הנתונים של שני הזוגות וניתוחם במהלך הפעילות המרכזית במליאה הובילו לחשיפת תהליכים של הבניית ידע שהתקיימו לא רק במהלך עבודתם בזוגות אלא גם בשיח ובפעולות שהיו סמויים ומקבילים לפעילות המרכזית במליאה, ולפיכך – העידו על השתתפותם הסמויה. סביבת למידה זו הוגדרה *כרובד הסמוי במליאה*. הפעילות המרכזית של המורה עם התלמידים במליאה הוגדרה *כרובד הגלוי* במליאה. ברובד הסמוי – שני זוגות התלמידים התייחסו לנאמר ברובד הגלוי, באמירות עצמאיות, בדיונים ביניהם ובדיונים עם תלמידים אחרים בסביבתם. על כן, מורכבות המליאה שנחשפה במחקר הובילה להגדרה חדשה של מושג המליאה:

המליאה מוגדרת כמכלול השיח והפעולות של המשתתפים, אלו המונחות על ידי המורה באופן ציבורי ברובד הגלוי, והן אלו המנוהלות על ידי הלומדים, בינם לבין עצמם באופן פרטי, ברובד הסמוי – וכן את מעברי הידע בתוך הרבדים וביניהם.

בהתאם להגדרה זאת, המליאה כוללת שלושה מרכיבים:

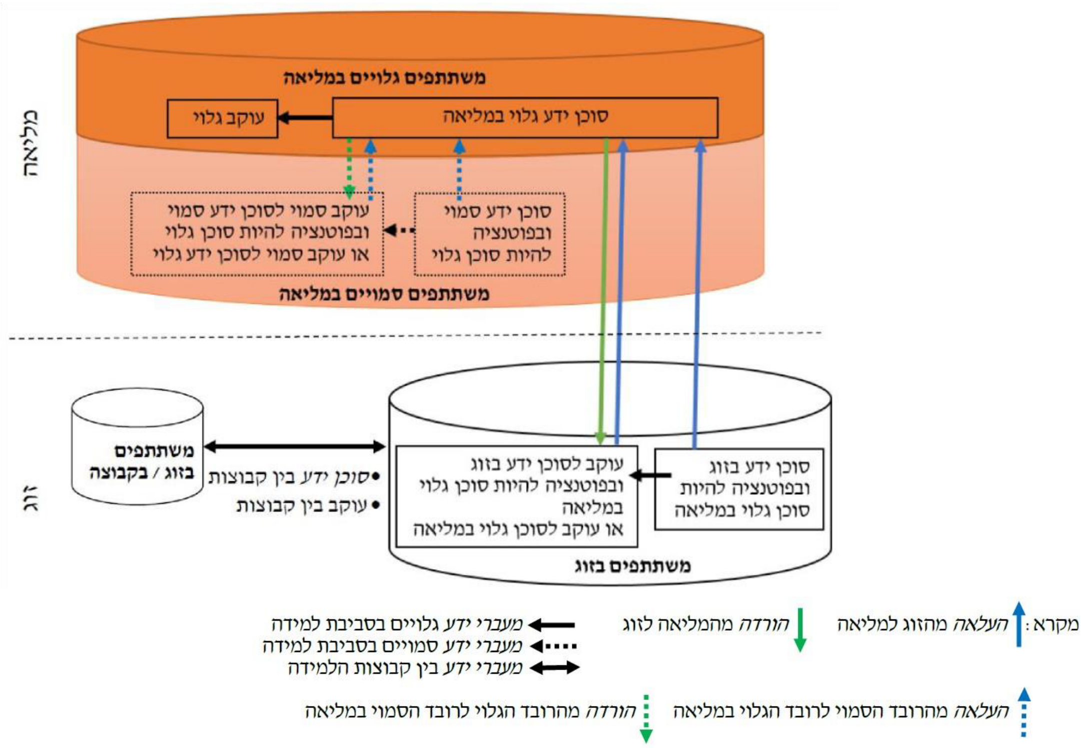
- *הרובד הגלוי* – השיח והפעולות הציבוריות שהמורה מנחה והתרומות שלה ושל התלמידים במליאה שהמורה היתה עדה להם;
- *הרובד הסמוי* – השיח ופעולותיו הפרטיות של התלמיד עם עצמו ועם תלמידים בסביבתו הקרובה ואשר המורה אינה שותפה להן;
- *מעברי הידע* – בין שני הרבדים ובתוך כל אחד מהרבדים.

אפשר לטעון, כי מנקודת מבטה של המורה, הגדרת המושג *מליאה* מוגבל לשיח ולפעולות שהיא מנחה ובהן היא משתתפת ברובד הגלוי וכן למעברי הידע בתוכו.

יתר על כן, במחקר זה התגלו תהליכי למידה משמעותיים ברובד הסמוי שהשפיעו הן על תלמידים בודדים (לדוגמה, תלמיד שעזר לחברו להבין רעיון מתמטי; תלמיד ששינה את טיעונו לגבי רעיון מתמטי) והן על הדיונים המתמטיים ברובד הגלוי במליאה (תלמיד שהעלה ברובד הגלוי במליאה רעיון מתמטי שעליו דן עם חברו ברובד הסמוי). תהליכים אלה חשפו מאפיינים של בעלי תפקידים חדשים בתוך ובין סביבות הלמידה, שלמיטב ידיעתנו טרם הוגדרו בספרות המחקרית. במליאה נוספו האבחנות בין *סוכן ידע גלוי* לבין *סוכן ידע סמוי* (overt / covert knowledge agent), ובין *עוקב גלוי* לבין *עוקב סמוי* (overt / covert follower). *סוכן ידע* ברובד הגלוי מוגדר גם אם יש לו *עוקב* סמוי. כמו כן, ניתוח השיח בין הזוגות בכיתה חשף את בעלי התפקידים שתפקדו בתוך ובין סביבות הלמידה: *סוכן ידע* ו*עוקב* בין הקבוצות. עוד נמצא מאפיין נוסף לפעילות העוקב: *מבקש הבהרה לרעיון* (asks for clarification). נחשפו גם מעברי ידע חדשים במליאה שהוגדרו במחקר זה כ*מעברי ידע סמויים*: *העלאה* (upload) – מהרובד הסמוי לרובד הגלוי במליאה, *הורדה* (download) – מהרובד הגלוי לרובד הסמוי במליאה ו*מעברי ידע סמויים* בתוך הרובד הסמוי. מיפוי בעלי תפקידים ומעברי ידע שהוגדרו בספרות המחקרית ואלו החדשים שנחשפו במחקר הנוכחי, במליאה, בעבודה בזוגות וביניהם מוצגים באיור 1.

איור 1

מעברי ידע של רעיונות מתמטיים ובעלי תפקידים, הגלויים והסמויים, בין ובתוך סביבות הלמידה



מספר דוגמאות להשתתפות סמויה של שני זוגות התלמידים, שהתייחסו באמירותיהם לנאמר ברובד הגלוי, מוצגות בטבלה 1.

טבלה 1

דוגמאות להשתתפות שני זוגות התלמידים ברובד הסמוי במליאה (במקביל לרובד הגלוי)

שיעור	תור	תלמיד	התייחסות ברובד הסמוי	לנאמר ברובד הגלוי
2	146	גדי	"אם שה-y שלילי אז הוא צודק"	כתגובה לתשובתו של רוני בנושא תחום שליליות של הפונקציה
4	68	רוני	"בנקודת המינימום"	כתשובה לשאלת המורה: "מתי אני מקבלת את התוצאה הכי קטנה"?
8	87	ברק	"המורה, זה יהיה מינוס 16 בצד השני"?	כתשובה לשאלה של המורה לשרטוט על הלוח
9	2	יואל	"לא יכול להיות שיש יותר משני פתרונות, משתי נקודות מגע עם ציר ה- x"	כתשובה לשאלת המורה: "למשוואה ריבועית, כמה פתרונות מקסימום יכולים להיות"?

ממצאים נוספים ברובד הסמוי הצביעו על כך שהתלמידים עזרו זה לזה להבין רעיונות מתמטיים בקרב הזוגות, או בין אחד מבני הזוג לתלמיד אחר שבסביבתו. אולם, בין היתר, נצפו גם אמירות המעידות על הבנה שגויה של רעיון מתמטי. האמירות של שני הזוגות במליאה נספרו לפי סוג ההשתתפות בשני הרבדים במהלך השיעורים וסיכומן מוצג בטבלה 2.

טבלה 2

מיפוי השתתפות שני הזוגות ברובד הגלוי וברובד הסמוי במליאה במהלך תשעת השיעורים

הרובד	סוג ההשתתפות במליאה	מספר ואחוזי האמירות של ברק וגדי (זוג 1)		מספר ואחוזי האמירות של רוני ויואל (זוג 2)	
הגלוי	השתתפות של אחד מבני הזוג בשיח במליאה	150	21%	250	40%
הסמוי	מונולוג או דיאלוג בזוג בהקשר לשיח במליאה	420	59%	330	54%
	דיאלוג של אחד מבני הזוג עם תלמיד אחר בסביבתו, בהקשר לשיח במליאה	43	6%	23	4%
	דיאלוג בזוג או דיאלוג של אחד מבני הזוג עם תלמיד אחר בסביבה, לא בהקשר לשיח במליאה	99	14%	10	2%
	סה"כ:	**712**	**100%**	**613**	**100%**

מתוך ממצאים אלו עלה, כי בקרב שני הזוגות – מעל מחצית מסך האמירות במליאה היו אמירות סמויות בהקשר לשיח המתמטי במליאה, ואחוזים מועטים (עד 14%) היו בנושאים שאינם בהקשר לנושא הנלמד במליאה.

מסקנות ותרומת המחקר

חשיפת הרובד הסמוי במחקר זה הובילה להגדרתו ולשילובו בהגדרה חדשה של מושג המליאה. כמו כן, ההמשגה של *מעברי הידע*, *סוכני ידע ועוקבים* תוקפה והורחבה. לרוב, השיח ברובד הסמוי במליאה נתפש כמפריע לתהליכי הלמידה, אך במחקר הנוכחי נמצא כי הוא תרם לתהליכי הלמידה ולהבניית רעיונות מתמטיים. ממצא זה תואם את הממצא במחקרם של ארנסט וחובריו (Ernest et al., 2019)), שבוצע בכיתה מעורבת של בנים ובנות, ונמצא כי נשים ביטאו יכולות מתמטיות גבוהות יותר ברובד הסמוי מאשר ברובד הגלוי במליאה. לכן, בהיבט הפרקטי המחקר מעלה למודעות המורה את תהליכי הלמידה המתרחשים ברובד הסמוי במקביל לדיונים במליאה. מודעות זאת תורמת ליכולת המורה להחליט האם לאפשר את קיומם או להשתיקם. המחקר אף תורם לידע המתודולוגי בניתוח סביבות למידה וממצאיו עשויים להוות בסיס למחקרי המשך בתהליכים או בנושאים אחרים, בקרב אוכלוסיות אחרות או בשילוב מתודולוגיות אחרות.

*מחקר זה נתמך בחלקו על ידי הקרן הישראלית למדעים, מענק מס. 1057/12

רשימת מקורות

עפרי, ע' וטבח, מ' (2017). התפשטות של ידע מתמטי בשיח טיעוני בכיתה, הגלוי והסמוי. אצל מ. איילון ונ. עדין (עורכות), *כנס ירושלים החמישי למחקר בחינוך מתמטי*, 94-96. ירושלים, ישראל.

Ernest, J. B., Reinholz, D. L., & Shah, N. (2019). Hidden competence: women's mathematical participation in public and private classroom spaces. *Educational Studies in Mathematics, 102*(2), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10649-019-09910-w

Hershkowitz, R., Tabach, M., & Dreyfus, T. (2017). Creative reasoning and shifts of knowledge in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education, 49*(1), 25-36. DOI: 10.1007/s11858-016-0816-6

Tabach, M., Rasmussen, C., Dreyfus, T., & Apkarian, N. (2020). Towards an argumentative grammar for networking: a case of coordinating two approaches. *Educational Studies in* Mathematics, 103, 139-155. DOI: 10.1007/s10649-020-09934-7

עד כמה קיים דיאלוג אמיתי בלמידת מתמטיקה? על גווני דיאלוגיות בעבודה משותפת של תלמידים סביב בעיה בגיאומטריה

נעמה בן דור, עינת הד-מצוינים

שיוךהטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא ורקע תיאורטי

למידת מתמטיקה בבית ספר כוללת מעברים קריטיים שבהם תלמידים נדרשים לעבור מדרך פיתרון מוכרת לדרך פיתרון חדשה. דוגמה למעבר קריטי היא המעבר בלמידת גיאומטריה מדרך פתרון ויזואלית/קונפיגורלית לדרך פתרון דדוקטיבית. מעבר זה נחשב לאחד האתגרים המרכזיים בלימוד גאומטריה (Duval, 1998). על פי התיאוריה הקומוגניטיבית (Sfard, 2008), מעברים קריטיים הם מאתגרים, מכיוון שהם דורשים מעבר לא רק בין דרכי פעולה שונות, אלא גם מעבר מהותי יותר – בין שיחים מתמטיים אינקומנסורביליים (Sfard, 2007). שיחים אינקומנסורביליים מבוססים על כללי־על שונים. למשל, בשיח הגאומטרי הקונפיגורלי, הכלל הוא שהערכה ויזואלית היא תנאי מספיק לנימוק טענה. לעומת זאת, בשיח הדדוקטיבי, הכלל הוא שהערכה ויזואלית היא רק שלב ראשון שעליה נבנית הוכחה דדוקטיבית (Ben-Dor & Heyd-Metzuyanim, 2020). על פי ספרד (2019), לא יכול להתרחש מעבר קריטי ללא מעורבות דיאלוגית של התלמיד. מעורבות דיאלוגית זו כרוכה בכך שהתלמיד: בוחן באופן אקטיבי אפשרות שהשיח שלו אינקומנסורבילי (מבוסס על כללי־על שונים) עם השיח של דובר אחר; שואף להשתתף בשיח האחר; וגם חותר לאימוץ מלא של השיח האחר. החשיבות שמייחסת ספרד למעורבות דיאלוגית חוברת למחקרים רבים בתחום מדעי הלמידה המראים כי השתתפות דיאלוגית של תלמידים מסייעת בפתרון בעיות (e.g., Schwarz & Linchevski, 2007). עם זאת, שימוש בהגדרה שמציעה ספרד, הגם שהיא מדוייקת ומציעה דרך אופרציונלית לבחון דיאלוגיות, עלול להביא לכך שלא נשים לב לגווני ביניים של דיאלוגיות בעבודה משותפת בין תלמידים. גוונים אלה חשובים במיוחד, משום שנראה כי מעורבות דיאלוגית מלאה מהסוג שמתארת ספרד אינה שכיחה בכיתות מתמטיקה (Sfard, 2019). מטרתנו במאמר זה היא לאפיין גוונים שונים של מעורבות דיאלוגית של תלמידים, כאשר הם פותרים במשותף בעיה בגיאומטריה המזמנת מעבר משיח קונפיגורלי לשיח דדוקטיבי.

בכדי להגדיר את גווני הדיאלוגיות השונים, אנו מתבססות על המרכיב המרכזי בכל שיח – הרוטינה (Lavie et al., 2019). רוטינה מבוצעת בתגובה למצב־מטלה נתון (למשל, המורה בכיתה מבקשת מתלמיד לפתור בעיה גיאומטרית), והיא מורכבת ממטלה והליך. המטלה היא הפרשנות של האדם המבצע למצב־המטלה, ואינה תמיד בהלימה עם מצב־המטלה (למשל, ייתכן שהמורה התכוונה שהתלמידים יפתרו בעיה גיאומטרית באמצעות הוכחה, אך התלמידים מסתפקים בשכנוע ויזואלי). ההליך הוא מה שאותו אדם מבצע בהתאם לפרשנות שלו (למשל, מוכיח דדוקטיבית את הבעיה).

בהתבסס על מונח זה, אנו ראשית מגדירות "רוטינה משותפת" כרוטינה בתגובה למצב־מטלה הדורש פעולה משותפת של שני משתתפים או יותר. רוטינה זו מורכבת מרוטינות אישיות של המשתתפים, שלהן מטלה זהה (כלומר, האופן שבו כל אחד מהמשתתפים מפרש את מצב־המטלה הוא זהה, אך

ההליך שהוא מבצע יכול להיות שונה). שנית, אנו מגדירות רוטינות משותפות כבעלות גוון דיאלוגי אם בעת ביצוען באים לידי ביטוי אחד או יותר מהמאפיינים הבאים: 1. בחינה אקטיבית של הדומה והשונה בין הרוטינות של כל אחד מהמשתתפים; 2. שאיפה לשחזר את הרוטינות של האחר; 3. חתירה לאימוץ של הרוטינות של האחר; 4. בחינת אפשרות לאינקומנסורביליות בין השיחים של המשתתפים והפיכת כללי־העל השונים למפורשים (למשל, כללים הדורשים הוכחה באמצעות חפיפה לעומת כללים המסתפקים בחפיפה באמצעות ויזואליזציה). רוטינות משותפות יכולות להתאפיין בגוונים שונים של דיאלוגיות, על פי סוגי המאפיינים השונים הבאים לידי ביטוי במהלכן. שאלת המחקר שלנו היא: באילו גווני דיאלוגיות התאפיינו הרוטינות המשותפות של תלמידי חטיבת ביניים, בתגובה למצב־מטלה של עבודה בזוגות לצורך פתרון בעיה גיאומטרית?

שיטה

משתתפי המחקר היו 10 תלמידי כיתות ח' וט', שהשתתפו בפעילות מתמטית שהנחתה הכותבת הראשונה במסגרת פרוייקט "דיאלוגוס" החוקר הוראה ולמידה דיאלוגית. מפאת קוצר המקום, אנו מתמקדות בדיווח זה ב־4 תלמידי כתה ט', שכן בכתה ח' נמצא שימוש בשיח הקונפיגורלי בלבד ולכן לא היה פוטנציאל להימצאותו של מאפיין הדיאלוגיות הרביעי של בחינת אינקומנסורביליות. עיצוב הפעילות התבסס על שני שיעורים מצולמים מפרויקט "עדשה" שבהם הוצגה בעיה גאומטרית בשם "שלושת הריבועים". בבעיה מוצגים שלושה סרטוטים, שבכל אחד מהם משולש ישר־זוית המונח בצורה שונה על ריבוע, ויש להשוות בין השטחים המשותפים בשלושת הסרטוטים. התשובה הקנונית ("הנכונה") היא ששלושת השטחים המשותפים שווים. מצב־המטלה כלל מענה על דף עבודה (**איור 1**) באופן יחידני ואז בזוגות. ההנחייה שניתנה בתחילת העבודה המשותפת היתה לבחון על מה מסכימים ועל מה לא מסכימים, ולהגיע להסכמה. מצב־המטלה תוכנן כך שנתונים נוספים (למשל, שהזוית הישרה של המשולש מונחת בנקודת מפגש האלכסונים של הריבוע) ינתנו על פי דרישה מהמנחה, כדי שלא לכוון את התלמידים מראש לבחירה בשיח הדדוקטיבי. לאחר סיום העבודה בזוגות, התלמידים התבקשו להחליף בני זוג ולמלא שוב את הדף. כתוצאה ממערך זה, נוצרו 4 אינטראקציות זוגיות שונות (סבב ראשון: אורנה ותמרה; דן ואלה. סבב שני: תמרה ודן; אורנה ואלה).

איור 1

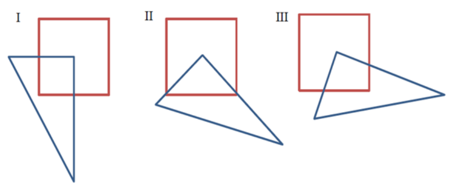
בעיית "שלושת הריבועים"

1. סמנו בכל שרטוט את השטח המשותף לריבוע ולמשולש
2. סדרו את השרטוטים לפי גודל השטח המשותף
3. הקיפו בעיגול את התשובה הנכונה בכל אחת מהטענות הבאות והסבירו אותה:

א. השטח המשותף בשרטוט I (קטן/ גדול/ שווה/ לא ניתן לדעת) מהשטח המשותף בשרטוט II

ב. השטח המשותף בשרטוט II (קטן/ גדול/ שווה/ לא ניתן לדעת) מהשטח המשותף בשרטוט III

ג. השטח המשותף בשרטוט III (קטן/ גדול/ שווה/ לא ניתן לדעת) מהשטח המשותף בשרטוט I

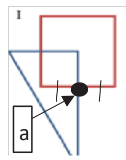
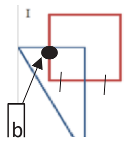
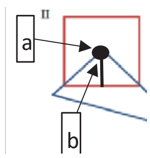


האינטראקציות תועדו ב־3 מצלמות שונות (מצלמה נייחת על כל זוג ומצלמה נעה עם המנחה), ותומללו במלואן ברמת רזולוציה גבוהה (על מה הצביעו, לאן פנה המבט, הבעת הפנים). סה"כ תומללו ונותחו עבור דיווח זה 70 דקות וידאו (642 שורות תמלול לפי תורות דיבור). בנוסף, נלקחו בחשבון

בניתוח דפי העבודה האישיים והזוגיים של התלמידים. ניתוח הנתונים כלל: ניתוח הנרטיבים, הרוטינות והמתווכים הויזואליים; חלוקה לרוטינות בינאישיות על סמך זיהוי מצב־מטלה שפורש על ידי שני המשתתפים באופן זהה (מטלה משותפת) ולבסוף, זיהוי מאפייני מעורבות דיאלוגית בשורות המכילות את הרוטינה המשותפת.

ממצאים

בארבע האינטראקציות הזוגיות נמצאו סך הכל 9 רוטינות משותפות שלא כללו מעורבות מנחה. מתוכן, רוטינה משותפת אחת בלבד הכילה את כל ארבעת מאפייני הדיאלוגיות – הרוטינה המשותפת הראשונה של אלה ודן. המטלה המשותפת של אלה ודן ברוטינה זו היתה להשוות בין שלושת השטחים המשותפים. לשם ביצוע מטלה זו, דן הציע הליך קונפיגורלי שמראה שכל השטחים שווים, ואילו אלה הציעה הליך דדוקטיבי שמראה שלא ניתן לדעת את היחס בין השטחים, כפי שניתן לראות בקטע הבא ([ ] מסמן דיבור בו זמני):

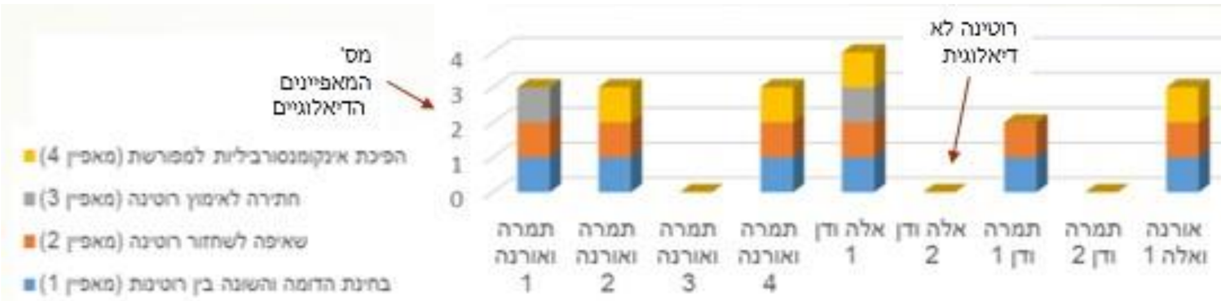
97	ד		תסתכלי, זה אממ, הנקודה הזאתי (a) בערך חצי מה..מהשטח, חצי מה..מה, מהצלע הזאתי (מסמן קו מכל צד של הנקודה על הצלע התחתונה בסרטוט I ב**איור 1**)
98	א		מממהם, [מה?] (מה פתאום)
99	ד		[הנקודה הזאתי] (b)
100	א		[מי אמר?] אבל אין לך נתונים (רוכנת לדף של דן)
101	ד		נגיד. נכון אבל בערך. הנקודה הזאת (b) זה בערך חצי מהצלע הזאתי (מסמן קו מכל צד של הנקודה על הצלע השמאלית של הריבוע)
102	א		אוקיי
103	ד		אז בעצם זה (השטח המשותף ב**איור 1**) רבע בערך, מכל השטח של הריבוע נכון?
104	א		אוקיי
105	ד		פה (סרטוט II ב**איור 1**) זה בעצם מגיע אממ בערך אם הנקודה הזאתי (a) היא באמצע אז האלכסון הזה שווה לאלכסון הזה (אלכסוני הריבוע) ואז זה גם זה רבע מה... זה רבע מהריבוע. תחשבי שכאילו את עושה ככה (b) מורידה...(גובה)
106	א		לא אתה לא יכול להחליט את זה ככה
107	ד		את מורידה, אין לנו באמת... (נתונים)
108	א		יופי, אז זה אומר שזה לא. ברגע שיהיה לך נתונים, ברגע שיהיה מידע, ברגע שיהיה לך [משהו]
109	ד		[נכון]
110	א		]אז[אתה תוכל רק לדעת
111	ד		נכון, אני אומר בתיאוריה

ההליך שדן הציע מסתמך על כלל־על קונפיגורלי שעל־פיו ניתן לקבוע יחסים בין שטחים תוך התבססות על הערכה ויזואלית ("*בערך* חצי מהצלע" [97, 101]; "רבע *בערך*" [103]). לעומת זאת, ההליך שאלה הציעה מסתמך על כלל־על דדוקטיבי שעל־פיו ניתן לקבוע יחסים בין שטחים תוך התבססות על נתונים ומשפטים גיאומטרים ("אין לך נתונים" [100]). מבחינת מעורבות דיאלוגית,

בשורות 100, 102 ו־104 ("אוקיי", רכינה לעבר הדף של ד)(אלה *בחנה באופן אקטיבי את הדומה והשונה* (מאפיין 1) בין ההליך שלה להליך של דן, *וניסתה לשחזר אותו* (מאפיין 2). בנוסף, היא *הפכה למפורשים את כלל־העל* (מאפיין 4) השונים בין השיח הדדוקטיבי שלה לשיח הקונפיגורלי של דן ("מי אמר, אבל אין לך נתונים" [100]; "אתה לא יכול להחליט ככה" [106]). בסופה של הרוטינה המשותפת, נראה כי דן *אימץ* (מאפיין 3) *את כלל-העל* של השיח הדדוקטיבי של אלה ("נכון," "אין לנו באמת," "רק בתיאוריה" [107, 109, 111]), והם כתבו בדף המשותף כי לא ניתן לדעת את היחס בין השטחים. בהמשך האינטראקציה, המנחה סיפקה לתלמידים נתון נוסף (מיקום נקודת מפגש האלכסונים), שאיפשר להם להוכיח דדוקטיבית כי השטחים המשותפים שווים, ודן השתמש בנתון זה בנסיון להוכיח דדוקטיבית טענה זו. רוטינה משותפת זו מופיעה בציר האיקס בגרף ש**באיור 2** תחת השם "אלה ודן 1". גרף זה מתאר אילו מאפיינים (וכן כמה מאפיינים) הכילה כל רוטינה. ניתן לראות כי עמודת הרוטינה המשותפת "אלה ודן 1", מכילה את כל ארבעת המאפיינים. כמו כן, שלוש מהרוטינות לא מכילות מאפיינים דיאלוגים כלל. רוטינות משותפות אלו התאפיינו בנסיון של כל אחד מהתלמידים להראות את דרך הפתרון שלו, ללא הקשבה לפתרון של התלמיד השני. לסיכום, ניתן לומר ששליש מהרוטינות לא הכילו כלל מאפייני דיאלוגיות, 5/9 מהרוטינות הכילו גוונים של דיאלוגיות חלקית, ורק רוטינה אחת של זוג אחד הכילה את כל מאפייני הדיאלוגיות.

איור 2

גווני דיאלוגיות ברוטינות משותפות



דיון

מטרתנו במאמר זה היתה לאפיין גוונים של מעורבות דיאלוגית של תלמידים בעת פתרון משותף של בעיה בגיאומטריה. מצאנו כי רק רוטינה משותפת אחת הכילה את כל מאפייני הדיאלוגיות. לו היינו בוחנים את המעורבות הדיאלוגית של התלמידים לפי מדד בינארי: דיאלוגיות (כל ארבעת המאפיינים קיימים) או אי-דיאלוגיות (אין מאפיינים דיאלוגיים), היינו אכן מוצאים כי מעורבות דיאלוגית אינה שכיחה בין תלמידים (Sfard, 2019). בחינת המעורבות הדיאלוגית על פי המאפיינים השונים, איפשרה תמונה מורכבת יותר לגבי מעורבות דיאלוגית. ממצאי המחקר שלנו מראים כי המאפיינים הדיאלוגיים השכיחים ביותר ברוטינות המשותפות היו "בחינת הדומה והשונה" ו־"שאיפה לשחזר" את הרוטינה של האחר. לעומת זאת, "חתירה לאימוץ" הרוטינה של האחר היה המאפיין הנדיר ביותר. בשלב הבא במחקר אנו מתכוונות לבחון את השינויים שהתרחשו בשיח הלמידה ברוטינות המשותפות אל מול הגוון הדיאלוגי שלהן. בחינה זו עשויה לתרום להבנת הקשר שבין גווני דיאלוגיות וסוגי למידה שוני ם כגון המעבר מהשיח הקונפיגורלי לשיח הדדוקטיבי.

רשימת מקורות

Ben-Dor, N., & Heyd-Metzuyanim, E. (2020). Micro-critical-transitions to the deductive geometric discourse: Mathematical and interactional aspects in collaborative learning. *Manuscript Submitted for Publication*.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villan (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (Vol. 5, pp. 37–52). Springer Netherlands.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: from ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*(2), 153–176.

Schwarz, B. B., & Linchevski, L. (2007). The role of task design and argumentation in cognitive development during peer interaction: The case of proportional reasoning. *Learning and Instruction*, *17*(5), 510-531.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2019). Learning, discursive faultiness and dialogic engagement. In N. Mercer, R. Wegerif, & L. Major (Eds.), *The Routledge International Handbook of Research on Dialogic Education* (pp. 89–100). Routledge.

שיקולים פדגוגיים-מתמטיים ביצירה של כלי ציוות אוטומטי

רותם עבדו, אוניברסיטת חיפה

מבוא

מטרת מאמר זה היא להציג מודל פדגוגי מבוסס מחקר לשימוש במערכות חישוביות למידה (Learning Analytics) כדי לתמוך בציוות תלמידים ללמידה שיתופית של מושגים מתמטיים. למידה שיתופית נחשבת בדרך כלל יעילה עבור הלומד היחיד, אבל לא כל למידה שיתופית היא יעילה (Johnson & Johnson, 2002). כך גם הרכב הקבוצה – מי הם הלומדים וכיצד הם קשורים זה לזה – משפיע על הסיכויים ללמידה (Lou et al., 1996). ציוות מושכל שמתאים לצרכים האישיים של התלמידים דורש תשומת לב למאפיינים של תלמידים וקבלת החלטות שמטרתן לטייב את סיכויי הלמידה. אבל ישנם שיקולים רבים לצוות – קוגניטיביים, בינאישיים ורגשיים. ציוות מושכל דורש משאבים רבים ממורים (Abdu, Olsher, & Yerushalmy, 2019), ולכן מורים רבים מעדיפים שתלמידים שכבר צוותו ימשיכו ללמוד יחד לאורך זמן.

מאמר זה בוחן איך ניתן לצוות תלמידים לטווחי זמנים קצרים יותר – משימות, או יחידות לימוד. בשנים האחרונות אנו עדים לשילוב כלי חישוביות למידה שנועדו לטייב תהליכי הוראה-למידה על ידי משוב למורים ותלמידים לגבי מצבם של הלומדים. במחקר זה אתמקד בכלי ציוות אוטומטי מבוססי חישוביות למידה (להלן, מצוותים אוטומטים) שנוצרים על ידי מפתחי תכנה, ומסייעים למורים ומרצים בציוות תלמידים (Maqtary, Mohsen, & Bechkoum, 2019). האלגוריתמים נפלאים, אבל לעיתים רחוקות בלבד מומחי תוכן (מתמטי) מעורבים בתהליך התכנון של כלים אלו. אילו שיקולים פדגוגיים יכלים להשפיע על היצירה של כלים לציוות אוטומטי ממוקד תוכן מתמטי? ובפרט, אילו שיקולי אישיים ובינאישיים יש לקחת בחשבון כאשר מתכננים מערכת כזו?

שיקולים אישיים לציוות הם הנתונים שנבחרים להיאסף על יחידים לאור מטרת למידה. ברוב המקרים בספרות, נתונים שנאספו על לומדים יתמקדו על מיומנויות שאינן ממוקדות תוכן – כגון מנת משכל, מגדר או כישורי שיח (Maqtary, Mohsen, & Bechkoum, 2019). כאנשי חינוך מתמטי, אנו מתעניינים לעתים קרובות בלמידה ממוקדת מושגים כגון הפרבולה ורוצים להבין את תפיסותיהם של תלמידים את המושגים הללו. לא ניתן לגשת ישירות אל חשיבה אדם על מושגים מסוימים (עדיין?), ולכן יש לפתח דרכים סינתטיות להשגת מטרה זו. במאמר זה בחרתי להשתמש במושג המרחב דוגמאות האישי (Sinclair, Watson, Zazkis, & Mason, 2011) המבוסס על רעיון דימוי המושג של וינר (Vinner, 1983) – רפרטואר של דוגמאות למושג מסוים הזמינות ברגע נתון לתלמיד. כלי ניתוח למידה יכולים לסייע בניטור מרחבי דוגמאות אישיים של תלמידים לגבי מושגים מתמטיים. אתמקד במערכת המרא"ה ובסוג של מטלות הנקראות "מטלות לעירור דוגמאות" (Yerushalmy & Olsher, 2020). במטלות אלו תלמידים מתבקשים להגיש דוגמאות שונות ככל האפשר כמענה לבעיה מתמטית. לדוגמה, ניתן לבקש מהתלמידים לבחור שלושה זוגות של נקודות ולבנות שלוש פונקציות ריבועיות על נקודות אלה. בעזרת מערכת המרא"ה ניתן לנתח דוגמאות שהוגשו על ידי תלמידים על פי קבוצה מוגדרת מראש של היבטים מתמטיים כגון מספר שורשי הפרבולה או נקודות מינימום/מקסימום. כך, ניתן לקבל נתונים על מרחבי הדוגמאות האישיים של תלמידים שונים בהקשר של מושג מתמטי נתון.

למורים שמצוותים תלמידים יש גם **שיקולים בינאישיים** בבחירתם, אילו תלמידים ילמדו יחד. במאמר זה אני מסתמך על תיאוריות דיאלוגיות (Bakhtin, 1984), ונגזרותיהן החינוכיות (Wegerif, 2011) כדי להבין כיצד מצבים בינאישיים שונים עשויים להיות יעילים בהתפתחות מרחב הדוגמאות האישי. עבדו, אולשר וירושלמי (Abdu, Olsher, & Yerushalmy, 2019) זיהו שלושה מצבים בינאישיים בין תלמידים: היררכי, הדדי ודמיון. מצב בינאישי היררכי (למשל בעת ציוות "הטרוגני", Lou, 1996) קורה כאשר תלמיד אחד או יותר בקבוצה היו "טובים יותר" מחבריהם. מערכים היררכיים מיושמים בעיקר כאשר מורה רוצה שתלמיד אחד יסייע לתלמיד שני בלמידה (Lou, 1996). מצב בינאישי הדדי קורה כאשר כל תלמיד בקבוצה מגלה מאפיין ייחודי אחד לפחות הרלוונטי למטלה, אשר לא בא לידי ביטוי על ידי אף אחד מחברי הקבוצה האחרים. הדדיות מיוצגת באופן מועט בלבד בספרות על צוות אבל מהווה מוקד חשוב בתיאוריות דיאלוגיות. דמיון (הידוע גם בשם "ציוות הומוגני", Lou, 1996) מייצג מערכים שבהם כל התלמידים בקבוצה תפקדו באופן דומה לפני שבוצע הציוות. צוות הומוגני משמש בעיקר לאפשר למורים לספק התערבות אדפטיבית לקבוצות דומות.

כמו מרחב הדוגמאות האישי, תיאוריות דיאלוגיות ממקמות למידה בהקשר מסוים - למשל, המושג המתמטי 'פרבולה' – ומניחות שינוי כתוצאה של אינטראקציה. מנקודת מבט דיאלוגית, ניתן להסתכל על מרחב הדוגמאות האישי של תלמיד כנקודת המבט אותה ביטא. מערכת המרא"ה יכולה לזהות מרחבי דוגמאות אישיים של תלמידים ולנתח אותם לפי המאפיינים המתמטיים שלהם. לאור ההבנות האלו, מהו המערך הבינאישי המועיל ביותר לפיתוח מרחבי הדוגמאות האישיים של תלמידים?

שיטה

משתתפים: חמישים תלמידים בכיתות ט'-י', מתוכם ארבעים ושלושה סיימו את כל ארבעת חלקי הניסוי, ושבעה תלמידים לא פתרו את מטלת הלמידה השיתופית והנתונים שלהם סומנו כבקרה.

מטלות: התלמידים פתרו שלוש מטלות – לבד (מבחן מקדים), בזוג (התערבות) ושוב לבד (פוסט־טסט). בכל מטלה התלמידים התבקשו לבחור שתי נקודות בתרשים אינטראקטיבי (גאוגברה) וליצור ביטויים אלגבריים של פונקציות ריבועיות העוברות בנקודות אלה (ר' טבלה 2). במטלה 1, אחת משתי הנקודות הייתה במיקום אקראי על ציר ה- X והשנייה במיקום אקראי על ציר ה־Y. במטלה 2 לשתי הנקודות הנתונות היה ערך y זהה וערכי שונים. במטלה 3 התלמידים יכלו לבחור כל זוג נקודות כרצונם.

מרחבי דוגמאות אישיים (משתנה תלוי): בעזרת המרא"ה אספתי נתונים על תשובות התלמידים לפי ארבעה היבטים של מושג הפרבולה: מספר שורשים [1,2], נקודת קיצון [מינ/מקס], משוואה [פולינום, שורשים, קודקודי], ונכונות (הפרבולה שהוגשה עוברת דרך 0, 1 או 2 נקודות).

מצבים בינאישיים (משתנה בלתי תלוי): תפעול המושג "מצבים בינאישיים" בא לסמן את סוגי הקשרים בין מרחבי הדוגמאות האישיים של כל התלמידים לבין בני הזוג שלהם בעקבות המטלה הראשונה, עבור כל היבט מתמטי (n=4X50=200). קודדתי את המצבים הבינאישיים לאחד מחמשת הסוגים הבאים: היררכי-נותן, היררכי-מקבל, הדדי, דמיון ובקרה. הגדרתי "התפתחות" כאשר מאפיין מתמטי שלא הופיע במטלה 1 הופיע במטלה 2. התפתחות בהיבט הנכונות סומנה כזו כאשר דוגמא נכונה לא הופיעה במבחן מוקדם אלא הופיעה בתשובה למטלה 3.

ממצאים

ניתוח כמותי: השוואה בין מצבים בינאישיים

נערך מבחן ANOVA חד כיווני, לבדיקת ההבדלים בין חמשת המצבים הבינאישיים. ניתן להניח שהאוכלוסיות שונות בהתבסס על Leven's test (W = .64; p = .63). תוצאת המבחן הראתה הבדל בין המצבים הבינאישיים (F = 4.76, p <.01). השתמשתי במבחן פוסט-הוק של פישר כדי להשוות בין חמשת המצבים. תוצאות הבדיקות מגלות הבדלים משמעותיים (p <.01) בין המצב ההדדי לבין כל שאר המצבים. הבדיקות האחרות לא העלו הבדל משמעותי בין מצבים.

טבלה 1

מספר המופעים של כל מצב בינאישי, כמות וממוצע המאפיינים המתמטיים שנוספו

	מספר מופעים של מצב בינאישי במטלה 2	מספר מאפיינים שנוספו בין מטלה 1 למטלה 3לא טובות	ממוצע
היררכי-נותן	31	16	**.52**
היררכי-מקבל	31	15	**.48**
הדדי	32	30	**.94**
דמיון	78	32	**.41**
בקרה	28	9	**.32**
סה"כ	200	102	**.51**

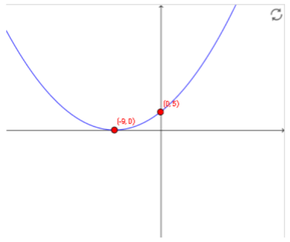
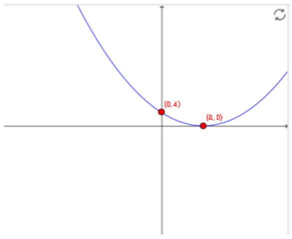
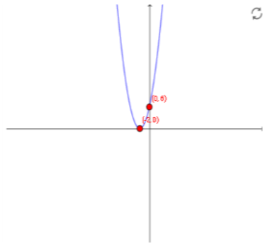
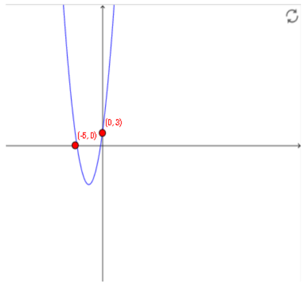
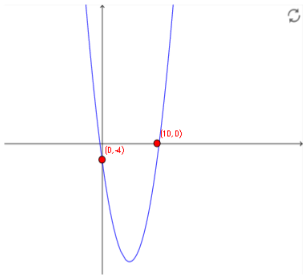
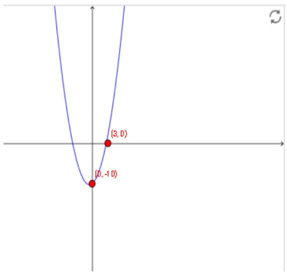
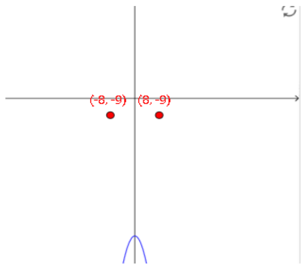
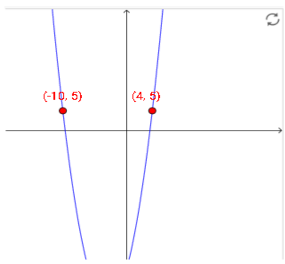
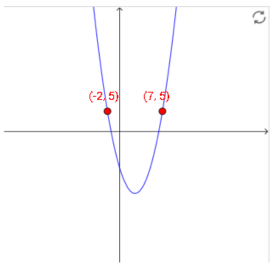
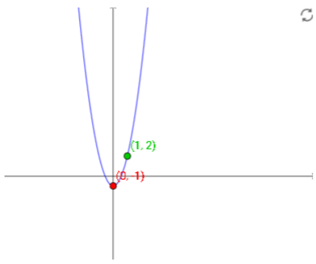
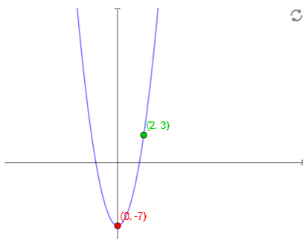
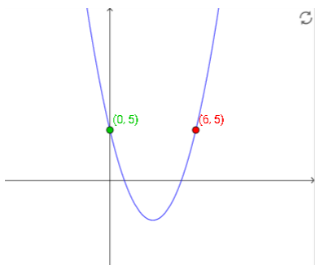
מקרה בוחן

נתאר כעת רצף למידה של שולמית (שם בדוי): (1) הדוגמאות שלה במטלה 1, (2) הדוגמאות שהגישה במטלה 1 של שותפתה למטלה 2 (3) הדוגמאות שהגישה ביחד עם שותפתה במטלה 2, ו (4) הדוגמאות שלה במטלה 3 (טבלה 2).

במטלה 1 שולמית הגישה דוגמאות מסוג אחד בלבד (שורש אחד, מינימום, וקודקודי). היא צדקה פעם אחת. שותפתה הגישה דוגמאות מסוג אחר (שני שורשים, מינימום, ופולינום) ולא צדקה באף מקרה. לפני המטלה שניה המצבים הבינאישיים ביניהם היו: הדדי עבור מספר שורשים, דמיון עבור נקודות הקיצון, הדדי עבור סוג המשוואה האלגברית והיררכי עבור נכונות (שולמית "נותנת"). כך, במטלה 3 הדוגמאות של שולמית כללו מאפיינים אחרים שמקורם (א) בדוגמה שלה ממטלה 3 – צורת כתיבה קודקודית (ב) בעבודתה של בת זוגה, ומאוחר יותר במטלה 2 – נקודה על ציר Y שהיא גם מינימום ושני שורשים, ו־(ג) במטלה 2 בלבד – הכלאה בין צורה פולינומית לצורה קודקודית, ושתי נקודות בעלות ערך Y זהה (טבלה 2). כך, שולמית הגישה שני סוגים חדשים של דוגמאות נכונות במקומות בהם הייתה הדדיות בינה לבין שותפתה ללמידה.

טבלה 2

רצף ההגשות בתהליך הלמידה של שולמית

	הגשה 1	הגשה 2	הגשה 3
שולמית: מטלה 1	$f(x)=(5/81)\cdot(x+9)^2$ 	$f(x)=0.06\cdot(x-8)^2$ 	$f(x)=1.5\cdot(x+2)2$ 
שותפתה של שולמית: מטלה 1	$f(x)= 2x^2+10x+3$ 	$f(x)= x^2-10x-4$ 	$f(x)= x2+x-10$ 
שולמית ושותפתה יחד: מטלה 2	$f(x)= -x^2-73$ 	$f(x)= (x+3)^2-44$ 	$f(x)=(x-2.5)2-15.25$ 
שולמית: מטלה 3	$f(x)= 3x^2 - 1$ 	$f(x)= 2.5x^2 - 7$ 	$f(x)= (x - 3)^2 - 4$ 

מסקנות

השילוב בין מרחב הדוגמאות האישי ומטלות לעירור דוגמאות (Yerushalmy & Olsher, 2020) ביחד עם תיאוריות למידה דיאלוגית (Wegerif, 2011) אפשרו לנו לחקור שיקולים פדגוגיים אליהם כדאי לשים לב ביצירה של כלי לציוות אוטומטי ממוקד תוכן מתמטי. מרחב הדוגמאות האישי הוא נקודת מבט דינמית המשתנה תוך אינטראקציה של הלומד עם הסביבה – וכך, ביצועי התלמידים

בכל אחת מהמטלות על פני כל אחד מההיבטים של מושג הפרבולה מספר את הסיפור של השתנות מרחבי הדוגמאות האישיים שלהם. הכוח המניע המרכזי של הדיאלוג הוא הפער הדיאלוגי - הבדל בין שתי נקודות מבט. כאשר יש פער, יש פוטנציאל לשינוי. כאשר תלמידים מקבלים או לוקחים זמן לחשוב בעצמם בעת למידה שיתופית, יותר רעיונות ייחודיים עולים, הסיכויים לצורך ליישב בין נקודות מבט גדלים (Abdu & Schwarz, 2020). תוצאות המחקר מראות בהתאמה כי אכן פער דיאלוגי בין שני מרחבי דוגמאות אישיים לגבי מושג ה'פרבולה', העלה את הסיכויים להתפתחות מרחבי דוגמאות אישיים של תלמידים. הדגמתי זאת בעזרת מקרה בוחן בו הדדיות בין מאפיינים קרתה יחד עם תוספות של מאפיינים במטלה 3. ניתן להסיק כי המערך הבינאישי המועיל ביותר לפיתוח מרחבי הדוגמאות האישיים של תלמידים הוא ההדדי – כאשר לכל אחד מחברי הקבוצה תפיסה שונה לגבי מושג הפרבולה. אטען כי תופעה זו ככל הנראה אינה תלויה בתוכן, ומומחי תוכן יכולים ללמוד כיצד ליצור עם מורים מודולים לצוות ממוקדי תוכן, שיתמכו בתהליך הציוות על ידי מורים. ניתן להשתמש ברעיונות דיאלוגים אלו בעת ציוות, על ידי יצירה של קבוצות כך שיובטח פער דיאלוגי בכניסה לדיאלוג.

רשימת מקורות

Abdu, R., Olsher, S., & Yerushalmy, M. (2019, July). Towards automated grouping: unravelling mathematics teachers' considerations. In B. Barzel et al., (Eds.), *Proceedings of the 14th Intl Conference on Technology in Mathematics Teaching*, (pp. 147-154). Essen, Germany.

Abdu, R., & Schwarz, B. (2020). Split up, but stay together: Collaboration and cooperation in mathematical problem solving. *Instructional Science*, 1-24.

Bakhtin, M. (1984). Problems of Dostoevsky's Poetics. *Theory and History of Literature*, Vol. 8. Transl. C Emerson. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (2002). Learning together and alone: Overview and meta-analysis. *Asia Pacific Journal of Education*, 22(1), 95-105.

Lou, Y., Abrami, P. C., Spence, J. C., Poulsen, C., Chambers, B., & d'Apollonia, S. (1996). Within-class grouping: A meta-analysis. *Review of educational research*, 66(4), 423-458.

Maqtary, N., Mohsen, A., & Bechkoum, K. (2019). Group formation techniques in computer-supported collaborative learning: A systematic literature review. *Technology, Knowledge and Learning*, 24(2), 169-190.

Sinclair, N., Watson, A., Zazkis, R., & Mason, J. (2011). The structuring of personal example spaces. *The Journal of Mathematical Behavior*, 30(4), 291-303.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.

Wegerif, R. (2011). Towards a dialogic theory of how children learn to think. *Thinking Skills and Creativity*, 6(3), 179-190.

Yerushalmy, M., & Olsher, S. (2020). Online assessment of students' reasoning when solving example-eliciting tasks: using conjunction and disjunction to increase the power of examples. *ZDM*, 1-17.

התמודדות בפעילויות מודלינג בסביבה טכנולוגית: מאפייני תהליכי המודלינג בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה

ג'והיינה עוואודה שחברי, אקדמיית אלקאסמי- מכללה אקדמית לחינוך

מבוא

מודלינג מוגדר כפעולה של תרגום דו-כיווני בין המציאות והמתמטיקה. הדוגלים בגישת המודלינג מציעים פעילויות, אשר מדגישות את השימושיות של המתמטיקה בחיי היום יום (Vorhölter, Kaiser, & Borromeo-Ferri, 2014). הפעילויות כוללות סיטואציות בהקשר מציאותי, שבו המידע המתואר חלקי, מעורפל ובלתי מוגדר. המתמודדים עם פעילויות מסוג זה נדרשים לתת משמעות לסיטואציה דרך תהליך מחזורי שבו התרגום בין העולם האמיתי והמתמטיקה מתקיים בשני הכיוונים דרך סדרה של שלבים ופעולות. בספרות המחקרית מוצעות דרכים שונות לתיאור של מחזור המידול. במחקר הנוכחי נתייחס למעגל המודלינג כפי שהוצע על ידי בלום ולייס (Blum & Leiß, 2005), שמארגן את תהליכי המודלינג על פי פעולות ושלבים. הפעולות כוללות: (1) הבנה ופישוט של הסיטואציה; (2) הצגת מודל ריאליסטי; (3) עבודה מתמטית לבניית מודל מתמטי; (4) הפקת תוצאות מתמטיות מיישום במודל המתמטי; (5) מתן פרשנות מציאותית לתוצאות המתמטיות; ו־(6) אימות התוצאות המציאותיות בהתאם לסיטואציה המקורית. פעולות אלו מובילות לשלבי המודלינג, הכוללים: (א) מודל הסיטואציה (ב) המודל המציאותי (ג) המודל המתמטי (ד) תוצאות מתמטיות (ה) תוצאות מציאותיות. אם התוצאות אינן תואמות את המציאות, המחזור מתחיל שוב.

גישת המודלינג נחשבת למרכיב מרכזי בתכניות להכשרת מורים למתמטיקה במדינות שונות בעולם. קורסים המבוססים על הגישה הולכים ומתפתחים במדינות שונות. סטודנטים להוראת מתמטיקה נדרשים להבין את הגישה כדי לשלב פעילויות מודלינג בבתי ספר. פיתוח הידע של הסטודנטים מתבצע דרך התמודדותם עם פעילויות מודלינג כלומדים (Shahbari & Tabach, 2019). על אף החשיבות של גישת המודלינג ויישומה בתוכניות להכשרת מורים, גישה זו עדיין לא נכללת בתהליך ההכשרה של מורים למתמטיקה ברוב הארץ, בפרט בהתייחס למודלינג ולהתמודדות עם פעילויות מודלינג בשילוב טכנולוגיה.

מחקרים בחנו סוגיות שונות בהקשר של טכנולוגיה ומודלינג בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה. אולם, מחקרים אלו היו קצרי טווח או השתמשו במספר מצומצם של פעילויות מודלינג. בודנסקי וטקאשי (Budinski & Takači, 2011), למשל, בחנו את תרומתה של הטכנולוגיה תוך התמקדות בבעיה אחת בלבד. מחקרים אחרים, למשל, בחנו את השילוב בין טכנולוגיה ומודלינג ללא התייחסות למאפיינים של תהליך המודלינג (Arzarello, Ferrara & Robutti, 2012). אחרים בחנו רק שלב אחד משלבי המודלינג, למשל שלב המתמטיזציה (Greefrath, Hertleif, & Siller, 2018). החשיבות של פתרון בעיות בעזרת כלים דיגיטליים היא סוגיה שדורשת מחקר נוסף, ובמיוחד התמודדות עם פעילויות מודלינג בשילוב טכנולוגיה (English, Bergman-Arleback & Mousoulides, 2016). אינגליש ועמיתיה (English et al., 2016) מדגישים שיש צורך במחקר שיבחן את, ויעקוב אחר, המורכבות של שילוב טכנולוגיה במהלך פעילויות מודלינג. כלומר, יש צורך במחקר שיבחן אילו וכיצד תהליכי מודלינג מושפעים במהלך השימוש בטכנולוגיה.

המחקר הנוכחי נערך במטרה לבחון את המאפיינים של תהליכי המודלינג בקרב סטודנטים להוראת מתמטיקה, בעת התמודדותם עם רצף של פעילויות מודלינג בשילוב טכנולוגיה. לבחון כיצד שילוב הטכנולוגיה משתנה במהלך רצף הפעילויות.

שאלות המחקר

1. מהם המאפיינים של תהליכי המודלינג (הפעילויות והשלבים) במהלך ההתמודדות של סטודנטים להוראת מתמטיקה עם רצף של פעילויות מודלינג בשילוב טכנולוגיה? מה מאפיין את מעגל המודלינג המתאר תהליך המודלינג?
2. כיצד נעשה שימוש בטכנולוגיה בכל אחד מהשלבים והפעילויות של המודלינג במהלך ההתמודדות סטודנטים להוראת מתמטיקה ברצף פעילויות מודלינג בשילוב טכנולוגיה?

שיטה

במחקר השתתפו 32 סטודנטים להוראת מתמטיקה הלומדים באחת המכללות להכשרת מורים. למשתתפים לא היה ידע קודם או ניסיון במודלינג. המחקר נערך לאורך סמסטר אחד. תהליך ההתערבות כלל רצף של חמש פעילויות מודלינג, במרווח של שבועיים בין המפגשים, המשתתפים התחלקו לקבוצות קבועות שלושה עד ארבעה משתתפים בכל קבוצה. בכל מפגש נדרשו המשתתפים לפתור פעילות מודלינג בשילוב טכנולוגיה. המשתתפים בחרו בעצמם באיזה שלב להשתמש בטכנולוגיה ובאילו כלים טכנולוגיים להשתמש. הנתונים נאספו באמצעות תצפיות בשלוש תחנות (במהלך הפעילות הראשונה, השלישית והאחרונה) נערך תיעוד בווידאו של שש קבוצות של סטודנטים להוראת מתמטיקה בעת התמודדותם עם פעילויות המודלינג. כל סרטי הווידאו תמללו מילה במילה. ניתוח הנתונים נערך בתהליך איטרטיבי של קריאת התמלילים וצפייה בסרטים, בהתאם לשיטת ההשוואה המתמדת אשר מתנהלת תוך התחשבות בהיבט הקוגניטיבי של מעגל המודלינג כפי שתואר ע"י בלום ולייס (Blum & Leiß, 2005). כל התהליכים (שלבים ופעולות) שהתרחשו במהלך ההתמודדות עם פעילות המודלינג תוארו באופן ויזואלי בהסתמך על עבודתן של שחברי וטבח (Shahbari & Tabach, 2016). לגבי מידת שילוב הטכנולוגיה, דורגו לארבע רמות שונות, בדירוג בין 0 (לא נעשה כל שימוש בטכנולוגיה) עד 3 (רמה גבוהה של שימוש בטכנולוגיה). ציון 3 מעיד על רמה גבוהה של שילוב טכנולוגיה, כולל שימוש במאפיינים הדינאמיים של התוכנות. לדוגמא שימוש בפונקציית "Average" לחישוב הממוצע במהלך הפתרון. ציון 2 מעיד על רמה בינונית בשילוב הטכנולוגיה, ללא שימוש במאפיינים ובתכונות החיוניות לפתרון הסיטואציה. ציון 1 מעיד על רמה בסיסית ביותר, למשל תרגום למודל המתמטי בלי שימוש ביתרונותיהן של התוכנות, או ציור מעגלים בגאוגברה. ציון 0 מעיד על כך שלא נעשה כל שימוש בטכנולוגיה.

ממצאים

מאפייני תהליכי המודלינג בשילוב טכנולוגיה

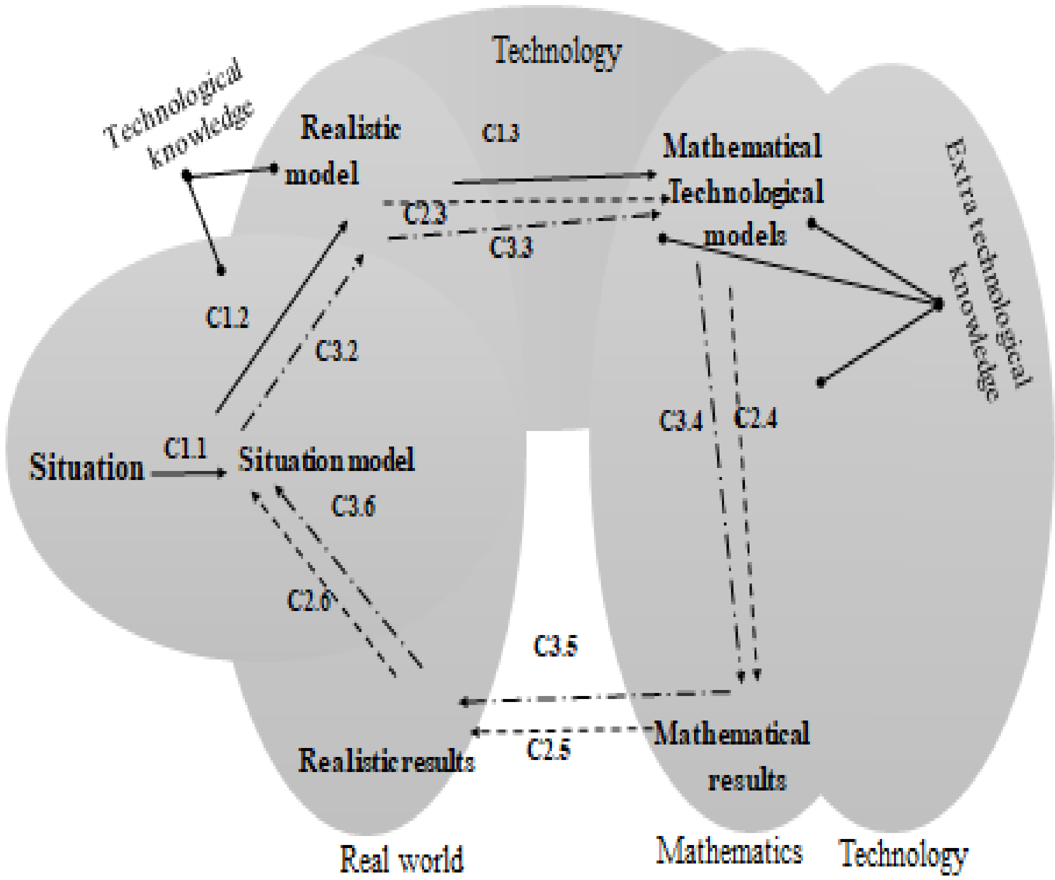
בשלוש התחנות ברצף של פעילויות המודלינג זוהו כל שלבי המודלינג (מודל ריאליסטי, מודל מתמטי, תוצאה מתמטית ותוצאה ריאליסטית) וכל פעולות המודלינג (פישוט והבנה, מתמטיזציה, יישום במודל המתמטי, תרגום התוצאות המתמטיות לריאליסטיות והערכת התוצאות הריאליסטיות) בקרב כל הקבוצות. הסדר ומחזוריות של הפעולות והשלבים השתנו בין קבוצה לקבוצה. גם באופן השילוב

של אמצעים טכנולוגיים בתהליך נמצאו הבדלים בין הקבוצות. בשלוש התחנות ברצף של פעילויות המודלינג שולבו הכלים הטכנולוגיים בשלבים שונים בקרב כל אחת מקבוצות המחקר. הממצאים מעלים שלושה מודלים שונים של שילוב הטכנולוגיה לאורך תהליך המודלינג: א) שילוב טכנולוגיה לאורכו של כל תהליך המודלינג; ב) שילוב טכנולוגיה רק לאחר הפקתו של המודל המתמטי; ו־ג) שילוב טכנולוגיה לאחר מציאתו של הפתרון המתמטי לפעילות, המשתתפים התמודדו בפעילות ללא שילוב של כלים טכנולוגיים. השימוש בטכנולוגיה זוהה רק בתום הפעילות המתמטית.

בהתאם לממצאים הקודמים, ניתן להצביע על שלושה סוגים שונים של מעגלי מודלינג. חשוב לציין שבתוך כל קטגוריה זוהו מעגלי מודלינג שונים. כלומר, זוהו הבדלים במספר מעגלי המודלינג או במסלולי המודלינג בין הקבוצות השונות, ובכל זאת ניתן לחלק את הקבוצות לקטגוריות על פי דמיון במאפייני העבודה שלהן. לחוסר מקום נדגים מעגל המודלינג השייך לקטגוריה הראשונה. מעגלי המודלינג ששייכים לקטגוריה זו מאופיינים בשילוב טכנולוגיה לצד שימוש בידע רחב ומקיף בכל הנוגע למאפייני התוכנות שבהן נעשה שימוש. איור 1 ממחיש תהליכי מודלינג שעברה אחת הקבוצות המשתייכת לקטגוריה זו.

איור 1

מעגל המודלינג – המקרה של אחת הקבוצות ששילבה טכנולוגיה החל משלב הפרשנות



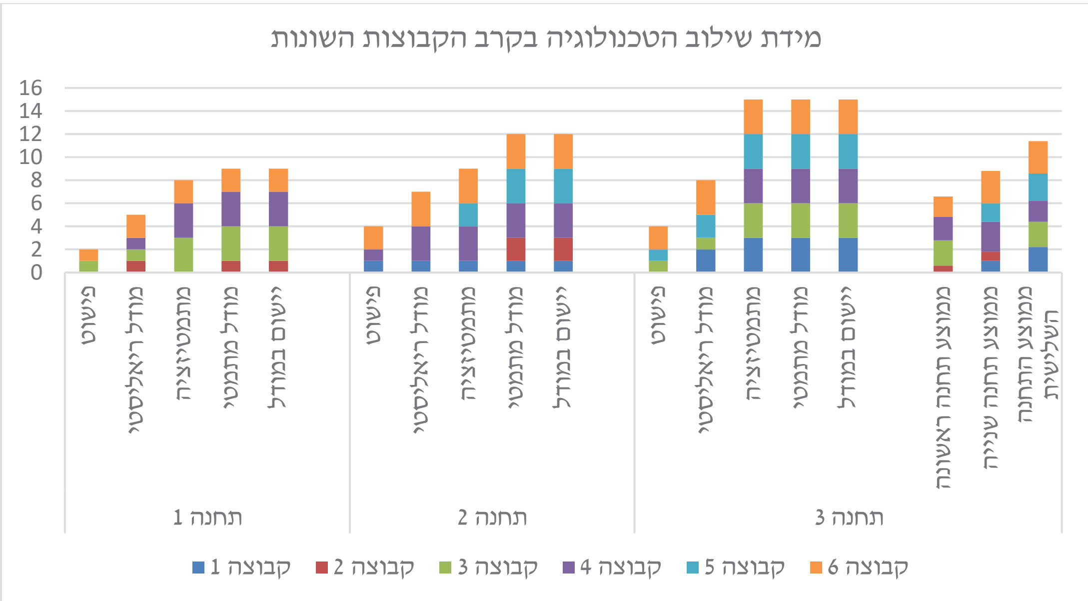
כפי שאפשר לראות ב**איור 1**, הקבוצה עברה שלושה מעגלי מודלינג (כל סוג חץ מעיד על מעגל שונה). המעגל הראשון נקטע לפני הפקת המודל המתמטי. שני המעגלים האחרים עברו באופן רציף בכל פעילויות ובכל שלבי המודלינג. השימוש בטכנולוגיה היה ברמות שונות כפי שנרחיב בסעיף הבא.

מידת שילוב הטכנולוגיה בתהליך המודלינג

בניתוח תהליכי המודלינג בקרב קבוצות המחקר בשלוש התחנות נמצא שוני ברמת השילוב של טכנולוגיה ובמידת השימוש בה. בנוסף, הממצאים מעידים שחל שינוי חיובי במידה וברמה של שילוב הטכנולוגיה לאורך הרצף של ההתמודדות עם פעילויות המודלינג בקרב כל הקבוצות. בהתאם לניקוד שהוצג בסעיף השיטה, ניתן לראות שממוצע מידת ורמת הטכנולוגיה עלה בקרב שש הקבוצות בשלוש התחנות בפעולות ובשלבי המודלינג (פישוט, מודל ריאליסטי, מתמטיזציה, מודל מתמטי ויישום במודל המתמטי). **איור 2** מתאר את השינוי שחל ברמה ובמידה של שילוב טכנולוגיה בכל השלבים והפעולות שהזכרנו קודם.

איור 2

מידת שילוב הטכנולוגיה בקרב שש הקבוצות בשלוש התחנות



סיכום

לסיכום, ממצאי המחקר הנוכחי מדגישים שאין מודל יחיד לשילוב של כלים טכנולוגיים בפעילויות מודלינג. המודל משתנה לאורך הזמן, הן מבחינת השלבים והן מבחינת המידה והרמה של שילוב הכלים הטכנולוגיים. ממצאים אלה עומדים בניגוד לממצאים של מחקרים, אשר הציעו מודל יחיד לשילוב הטכנולוגיה. ממצאי המחקר הנוספים, מעידים על עלייה ברמת השימוש בטכנולוגיה בקרב הקבוצות השונות במהלך ההתמודדות בפעילויות בשלוש התחנות. ניתן להסביר את מגמת העלייה בכך שהמשתתפים נחשפו במהלך רצף ההתמודדות למאפיינים השונים של הכלים הדיגיטליים, ובמיוחד גאוגברה והגיליון האלקטרוני. החשיפה אפשרה להם להשתמש במאפייני הכלים עם הזמן.

רשימת מקורות

Arzarello, F., Ferrara, F., & Robutti, O. (2012). Mathematical modelling with technology: the role of dynamic representations. *Teaching Mathematics and its Applications, 31*(1), 20-30.

Blum, W., & Leiß, D. (2005). "Filling Up"-the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of* *the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Spain: Fundemi Iqs, Universitat Ramon Llull.

Budinski, N., & Takači, D. (2011). Introduction of the notion of differential equations by modelling based teaching*. International Journal for Technology in Mathematics Education, 18*(3), 107-111.

English, L. D., Arleback, J. B. & Mousoulides, N. (2016). Reflections on progress in mathematical modelling research. In A. Gutierrez, G. Leder & P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 383–413). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Greefrath, G., Hertleif, C., & Siller, H. S. (2018). Mathematical modelling with digital tools—A quantitative study on mathematising with dynamic geometry software. *ZDM*, *50*(1-2), 233-244.

Shahbari, J. A, & Tabach, M. (2016). Developing modelling lenses among practicing teachers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(5), 717-732.

Shahbari, J. A., & Tabach, M. (2019). Adopting the Modelling Cycle for Representing Prospective and Practicing Teachers' Interpretations of Students' Modelling Activities. In G. Stillman & J. Brown, (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education* (pp 179-196). Cham: Springer.

Vorhölter, K., Kaiser, G., & Ferri, R. B. (2014). Modelling in mathematics classroom instruction: An innovative approach for transforming mathematics education. In Y. Li, E. Silver, & S. Li (Eds.), *Transforming mathematics instruction* (pp. 21–36). Cham, Switzerland: Springer International Publishing.

למידה דרך אבחון פתרונות שגויים מוכנים מראש בהשוואה לאבחון־עצמי של פתרונות אישיים בקרב תלמידי כיתות ט' הלומדים חזקות

<u>ראפע ספדי</u>[1], **נאדרה חוא**[1,2]

[1] המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל – חיפה; [2] מקיף עין-מאהל

מבוא

חוקרים בתחום הוראת המתמטיקה הצביעו על התועלת הטמונה בלמידה מניתוח טעויות מתמטיות ודיון בהן (Borasi, 1994). אחת הדרכים לשילוב ניתוח טעויות בהוראת המתמטיקה מתבססת על שימוש בפעילויות אבחון (Troubleshooting activities) של פתרונות שגויים מוכנים מבעוד מועד (Pre-prepared erroneous examples). פתרון שגוי מוכן מראש הוא פתרון שהוכן על ידי המורה (המומחה) והוא מתאר את השלבים לפיתרון הבעיה, כאשר לפחות שלב אחד הוא שגוי ומציג תפישה מוטעית (Misconception) הרווחת בקרב תלמידים (Große & Renkl, 2007). בפעילויות אלה התלמידים נדרשים לזהות את החלק השגוי בפתרון ולהסביר את הסתירה בין התפישה המוטעית שאליה מתייחס החלק השגוי בפתרון, לבין התפישה המדעית המקובלת (Große & Renkl, 2007). בדרך כלל, הפתרון השגוי המוכן מראש משוייך לתלמיד אנונימי והתלמידים מקבלים מידע מראש שהפתרון השגוי הוא שגוי. דרך נוספת לניתוח טעויות מתבססת על שימוש בפעילויות אבחון-עצמי (Self-diagnosis activities) של פתרונות אישיים שהתלמידים יצרו בעת שניסו לפתור בעיות מתמטיות בכוחות עצמם (Safadi, 2018). בפעילויות אבחון־עצמי התלמידים נדרשים לזהות את החלק השגוי בפתרונותיהם ולהסביר מדוע חלק זה אינו נכון. כלומר, לתאר את הסתירה בין התפישה המוטעית שבאה לידי ביטוי בחלק השגוי של הפתרון שלהם לבין התפישה המדעית המקובלת.

בשני סוגי פעילויות אלו, תלמידים מקבלים תמיכה בצורה של דוגמאות פתרון (Worked examples) המציגות את שלבי הפיתרון של בעיה. כדי לעודד את התלמידים להשתמש בדוגמאות פתרון בצורה יעילה בשני סוגי הפעילויות הללו, הציע לאחרונה ספדי (Safadi, 2018; Safadi & Ababsy, 2020) להציג את דוגמת הפתרון כחלק ממחוון (Rubric), שבו הקריטריונים למתן ציון מתמקדים בכל אחד משלבי הפתרון. בפעילויות אבחון פתרון מוכן מראש, התלמידים נדרשים במפורש להשוות בין הפתרון השגוי המוכן מראש לבין דוגמת הפתרון שבמחוון, כדי לזהות ולהסביר את הטעות המושתלת בפתרון השגוי המוכן מראש, ולאחר מכן להעריך אותו באמצעות ציון (Safadi & Ababsy, 2020). בהמשך נכנה פעילויות אלה בשם 'פעילויות אבחון פתרון שגוי מוכן מראש מצויננות' ונסמן אותן ב־GTS (Graded Troubleshooting activities).

באופן דומה, בפעילויות אבחון־עצמי התלמידים נדרשים להשוות בין הפתרון שלהם לבין דוגמת הפתרון המתוארת במחוון כדי לזהות ולהסביר את טעויותיהם, ולאחר מכן להעריך את הפתרון שלהם באמצעות ציון (Safadi, 2018). בהמשך נכנה פעילויות אלה בשם 'פעילויות אבחון-עצמי מצויינות' ונסמן אותן ב־GSD (Graded Self-Diagnosis activities).

פעילויות GSD הן סוג אחד של הערכה־עצמית (Self-assessment) המעודדות את התלמידים לקיים רפלקציה על טעויותיהם וללמוד מהן, וכל התלמידים צפויים לצאת נשכרים מהן. לעומת זאת,

פעילויות GTS הן סוג אחד של הערכת עמיתים (Peer assessment), שבהן העמית המוערך (Assessee) הוא התלמיד האנונימי והעמית המעריך (Assessor) הוא התלמיד עצמו. הערכת עמיתים מעודדת את התלמידים לקיים רפלקציה על טעויות של האחר כדי ללמוד מהן. חוקרים בתחום של הערכה טוענים כי הערכת עמיתים מעודדת את התלמידים לבחון גם את ההבנה שלהם, ולא רק את זו של עמיתיהם, וכך הם לומדים (Black, Harrison, & Lee, 2003) – למידה באמצעות הערכת עמיתים צפויה להתנהל על-ידי הערכה עצמית. האמנם שני סוגי הפעילויות GTS ו־GSD צפויים לקדם את הלמידה בקרב התלמידים במידה שווה? הצורך בבחינה זו עולה בעקבות ממצאים סותרים של מחקרים אחרונים שהתמקדו בלמידה באמצעות פתרונות שגויים מוכנים מראש. בעוד שלויבל ולוידרס (Loibl & Leuders, 2019) דיווחו שרק תלמידים שמחזיקים בתפישה מוטעית הזהה לזו המושתלת בפתרון השגוי המוכן מראש הם אלה שיוצאים נשכרים ממנה, הרי שספדי ועבאבסי (Safadi & Ababsy, 2020) דיווחו שכל התלמידים יוצאים נשכרים, ללא קשר אם התפישה המוטעית שבה הם מחזיקים זהה לזו המושתלת בפתרון השגוי המוכן מראש.

מטרתו של המחקר הנוכחי הייתה לבחון את היעילות של פעילויות GTS בהשוואה לזו של פעילויות GSD בקרב תלמידי כיתות ט' הלומדים חזקות. השערת המחקר הייתה ששני סוגי הפעילות יקדמו את הלמידה בקרב התלמידים במידה שווה. בהמשך נציג רק חלק מהממצאים שעלו במחקר.

מתודולוגיה

מערך המחקר

מערך המחקר כולל מבחן מקדים (Pretest), התערבות (Intervention), מבחן בתר מיידי (Immediate posttest) ומבחן בתר דחוי (Delayed posttest) שהתקיים מיד לאחר יחידת לימוד בנושא 'חזקות'. בהתערבות, התלמידים בכל כיתה הוצמדו באופן אקראי לסדרה של פעילויות GTS (קבוצת GTS) או לסדרה מקבילה של פעילויות GSD (קבוצת GSD).

משתתפים

במחקר השתתפו 10 כיתות ט' מ־6 בתי-ספר שונים מהמגזר הערבי: 111 תלמידים בקבוצת GTS ו־101 תלמידים בקבוצת GSD. כל כיתה למדה אצל מורה אחר למתמטיקה. הכיתות היו הטרוגניות מבחינת יכולות התלמידים במתמטיקה.

כלים

לאיסוף הנתונים נערכו מבחן מקדים, המבחן המיידי והמבחן הדחוי. כל מבחן כלל תשע בעיות המכסות את החומר שנלמד ביחידת הלימוד בנושא חזקות. הבעיה המתוארת ב**איור 1** היא דוגמה לאחת הבעיות מהמבחן המקדים ('בעיית המקור'). בכל מבחן, הבעיות היו איזומורפיות לאלו שבשני המבחנים האחרים. כדי לפתור את הבעיות, התלמידים נדרשים להשתמש בכללי החזקות וברעיונות מתמטיים המהווים חלק מלמידת חזקות. בעיות אלה תוכננו גם כדי להציף תפישות מוטעות רווחות בנושא חזקות. כך למשל, הבעיה המתוארת ב**איור 1** מזמנת שימוש בתפישות מוטעות כגון: "כאשר מחברים ביטויים בחזקות שבהם הבסיס זהה, משאירים את אותו הבסיס ומחברים את החזקות (תפישה "A"). בנוסף, נעשה שימוש בתשעה דפי עבודה מסוג GTS וב־9 דפי עבודה מקבילים מסוג GSD. כל דף עבודה מסוג GTS ודף העבודה המקביל לו מסוג GSD, התמקדו באחת מהבעיות שהיו

במבחן המקדים. **איור 1** מציג דף עבודה לדוגמה מסוג GTS, והפתרון השגוי המוכן מראש מציף את התפישה השגויה "A". הפתרון לדוגמה שהופיע במחוון בכל דף עבודה, מתאר את כלל החזקות או את הרעיון שיש להשתמש בו כדי לפתור את הבעיה, וכיצד מיישמים אותו (ב**איור 1** מופיעה דוגמה למחוון המציג את שלבי הפתרון של בעיית המקור). דפי העבודה מסוג GSD היו זהים לאלה שמסוג GTS אך ללא הפתרון השגוי המוכן מראש.

איור 1

דף עבודה כדוגמה לפעילות GTS

דף עבודה – אבחון פתרון שגוי

לפניך בעיה, פתרון שגוי לה של תלמיד בשם "סאמי", ומחוון המתאר את הפתרון הנכון. לאחר קריאת הבעיה בעיון רב, קרא את הפתרון השגוי של סאמי וכן את הפתרון הנכון המתואר במחון והשווה ביניהם. לאחר מכן, ענה על השאלות המתוארות לאחר המחוון.

הבעיה: פשטו את הביטוי הבא תוך שימוש בחוקי החזקות: $3^5+3^5+3^5=$

הפתרון השגוי של סאמי: $3^5+3^5+3^5=3^{15}$. זה בגלל שהבסיס 3 זהה לכולם, והחזקה 5 חוזרת על עצמה 3 פעמים. ולכן נקבל $3^{(3\cdot5)}$ וזה שווה ל-3^{15}.

מחוון

התשובה הסופית	החוק/הרעיון	יישום החוק/הרעיון	הניקוד (מתוך 4 נק')
$3^5+3^5+3^5=\mathbf{3^6}$	1) חיבור חוזר של אותו ביטוי מספר פעמים שווה למכפלת מספר הפעמים שהביטוי חוזר על עצמו בביטוי עצמו.	הביטוי 3^5 חובר עם עצמו 3 פעמים. ולכן ניתן לרשום אותו כפעולת הכפל הבאה: $3\cdot3^5$	**2 נק'** להמרת חיבור חוזר לכפל
	2) $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$ • הבסיס של החזקה קבוע. • מחברים רק את החזקות.	$\mathbf{3\cdot3^5=3^{1+5}=3^6}$	**2 נק'** להמרת הכפל של שני ביטויים עם אותו בסיס לביטוי עם חזקה.

1) הקיפו בעיגול את החלק השגוי בפתרון של "סאמי".

2) הסבירו את הסתירה בין הפתרון השגוי של "סאמי" לבין הפתרון הנכון המתואר במחוון.

3) העריכו את הפתרון השגוי של "סאמי" באמצעות ציון על סמך הקריטריונים למתן ציון המתוארים במחוון. הסבירו מדוע.

הליך המחקר

בשלב ראשון, התלמידים למדו יחידת לימוד בת 20 שיעורים בערך במהלך חודש ימים בטרימסטר הראשון של שנת הלימודים. כל מורה לימדה את יחידת הלימוד בדרך שלה ובסיומה נערך המבחן המקדים. התלמידים סיימו מבחן זה במהלך 20 דקות. לאחר שבוע התלמידים בכל כיתה פוצלו באופן אקראי לשתי קבוצות: קבוצת GTS וקבוצת GSD. כל קבוצה למדה בכיתה נפרדת. בקבוצת GTS התלמידים קיבלו סדרה של 9 פעילויות GTS ובקבוצת GSD קיבלו סדרה מקבילה של 9 פעילויות GSD. כל המשתתפים סיימו את הפעילויות במהלך שיעור אחד. באותו יום, במהלך השיעור העוקב לשיעור שבו היו הפעילויות, התקיים המבחן המיידי, ולאחר שבוע התקיים המבחן הדחוי (20 דק').

עיבוד הנתונים

כדי לבדוק באיזו מידה התלמידים בקבוצת GTS, קידמו את הישגיהם בהשוואה לקבוצת GSD, מהמבחן המקדים למבחן המיידי ומהמבחן המקדים למבחן הדחוי, וכדי לבחון את ההבדלים בהישגי התלמידים בשתי הקבוצות בכל מבחן, נעשה שימוש במדידות חוזרות ANOVA עם שלוש נקודות זמן (מבחן מקדים, מבחן מיידי ומבחן דחוי) ועם שני סוגי קבוצות: GTS בהשוואה ל־GSD.

ממצאים

הממצאים שעלו מניתוח זה מתוארים ב**טבלה 1**, המצביעה על כך שהאינטראקציה בין סוג הקבוצה לבין הזמן אינה מובהקת. כלומר, לא נמצא הבדל מובהק בהישגי התלמידים בשתי הקבוצות מהמבחן המקדים למבחן המיידי ומהמבחן המקדים למבחן הדחוי.

טבלה 1

סטטיסטיקה השוואתית של הישגי התלמידים (באחוזים) במבחן המקדים, בתר־מיידי ובתר־דחוי

משתנה תלוי	קבוצת GTS (n = 111)		קבוצת GSD (n = 101)		df	F	p	η^2
	M	SD	M	SD				
זמן× קבוצה					1	1.55	.215	.007
מבחן מקדים	66.20	22.11	66.08	22.48	1	0.00	.969	.000
מבחן מיידי	86.18	18.45	90.57	13.15	1	3.92	.049	.018
מבחן דחוי	85.83	18.72	89.12	14.13	1	2.05	.153	.010

דיון

ממצאי המחקר מלמדים כי התלמידים הרוויחו במידה זהה משני סוגי הפעילויות ובכך הם מאוששים את השערת המחקר, ומחזקים את הטענה שהערכה עצמית מהווה כעין מתווך ללמידה מהערכת עמיתים (Black et al., 2003). בעוד שהממצאים עומדים בהלימה עם הממצאים של ספדי ועבאסי (Safadi & Ababsy, 2020), הם סותרים את ממצאי לויבל ולוידרס (Loibl & Leuders, 2019).. המחקר הנוכחי התמקד אך ורק בשכבת גיל אחת ובנושא אחד, ולכן מומלץ לערוך מחקרים עתידיים כדי לבחון את היעילות של GTS בהשוואה ל־GSD בשכבות גיל אחרות ובנושאים אחרים.

רשימת מקורות

Black, P., Harrison, C., & Lee. C. (2003). *Assessment for Learning: Putting It into Practice.* Maidenhead: Open University Press.

Borasi, R. (1994). Capitalizing on errors as 'springboards for inquiry': A teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*, 166–.802

Große, C. S., & Renkl, A. (2007). Finding and fixing errors in worked examples: Can this foster learning outcomes? *Learning and Instruction, 17*(6), 612-.436

Loibl, K., & Leuders, T. (2019). How to make failure productive: Fostering learning from errors through elaboration prompts. *Learning and Instruction, 62*, 1–.01

Safadi, R. (2018). Knowledge-integration processes and learning outcomes associated with a self-diagnosis activity: The case of 5th-graders studying simple fractions. *International Journal of Science and Mathematics Education. 16*(5), 929–.849

Safadi, R. & Ababsy, R. (2020). Learning from Troubleshooting Activities when Contrasting

Erroneous Examples with Worked Examples in the Physics Classroom. *Physics Education, 55*(5), 055024.

היבטים כמותיים בגיל הרך: אלו מצבים מבוגרים מתארים?

רותי ברקאי[1,2], אסתר לוינסון[1], דינה תירוש[1], פסיה צמיר[1]

[1] אוניברסיטת תל־אביב; [2] מכללת סמינר הקיבוצים

רקע תיאורטי

בשנים האחרונות גבר העניין בקידום ידע מתמטי של ילדים בגיל הרך (למשל, Sarama & Clements, 2009). מחקרים דיווחו כי ילדים צעירים מסוגלים ללמוד מושגים כמותיים (למשל, Lewis Presser, Clements, Ginsburg, & Ertle, 2015) וכי התערבות מתמטית בגיל הרך משפרת הישגים מתמטיים בבי"ס יסודי (Jordan, Kaplan, Ramineni, & Locuniak, 2009). בהתאם לכך, חוקרים המתמקדים בחינוך מתמטי בחנו דרכים לטיפוח ידע מתמטי בגיל הרך (למשל, Ginsburg, Lee, & Boyd, 2008).

במדינות רבות פותחו תכניות ללימוד מתמטיקה לגיל הרך (למשל, משרד החינוך והתרבות, 2010). גינצבורג (Ginsburg, 2016) הצהיר כי בעוד שחוקרים מדווחים כי ילדים צעירים אכן מעלים רעיונות מתמטיים (כמותיים וגיאומטריים), גננות והורים לא בהכרח משוכנעים בכך.

מתוך הכרה בחשיבות שיש לגננות בטיפוח ידע מתמטי של ילדים בגיל הרך, חלה עלייה במחקרים המתמקדים בפיתוח ובהערכה של דרכים לשיפור הידע הנדרש להוראת מתמטיקה בגיל הרך (למשל, Tsamir, Tirosh, Levenson, Barkai, & Tabach, 2015; Clements et al., 2011). לקידום ידע גננות חשיבות רבה, אך חשוב לזכור כי ילדים צעירים מבלים חלק גדול מזמנם עם מבוגרים אחרים (כגון הורים, סבים, דודות ודודים). מבוגרים אלה יכולים אף הם למלא תפקיד משמעותי בטיפוח הידע המתמטי של ילדים צעירים (Zippert, & Rittle-Johnson, 2020). יתרה מכך, מחקרים מדווחים שלתמיכה ביתית בחוויות המתמטיות, באמצעות צעצועים והתייחסות מתמטית לפעילויות יום יומיות (כגון ספירת מדרגות, עריכת שולחן וכיו"ב) חשיבות רבה לטיפוח ידע הילדים (Anders et al., 2012).

לפיכך, אם השאיפה היא לקדם חשיבה מתמטית של ילדים צעירים, יש להתייחס ולטפח את ההתייחסות להיבטים מתמטיים גם בסביבה הביתית. בהתאם לכך, אם ברצוננו לעודד הורים ומבוגרים נוספים לעסוק במתמטיקה עם ילדים צעירים, עלינו לאפיין את הידע שלהם ועמדותיהם לגבי יכולות מתמטיות של ילדים צעירים ובהתייחס למידע זה לפתח דרכים המתייחסות לעמדות ומטפחות ידע.

המחקר המתואר במאמר זה הינו חלק מפרויקט גדול יותר המתמקד בידע ובאמונות מבוגרים לגבי למידת מתמטיקה בגילאים צעירים. מאמר זה בוחן האם כאשר מבוגרים מתבקשים לתאר מצבים בהם ילדים מעלים בעצמם רעיונות כמותיים, הם אכן מתארים מצבים כאלה ואם כן, אילו רעיונות כמותיים הם מתארים? האם כאשר מבוגרים מתבקשים לתאר מצבים בהם באינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים עולים רעיונות כמותיים, הם מתארים רעיונות כאלה, ואם כן, אילו רעיונות כמותיים?

מתודולוגיה

תשעים מתנדבים, בגילאי 20-60 אשר אינם גננות, השתתפו במחקר. תחומי העיסוק שלהם מגוונים וכוללים מורים (בבתי ספר יסודיים ועל־יסודיים), פסיכולוגים, מרפאים בעיסוק, מהנדסים, רואי חשבון, אנשי מחשבים ועוד. המדגם הינו מדגם נוחות והמשתתפים התנדבו להשתתף בו.

כל אחד מהמשתתפים התבקש להשיב (בכתב) על שתי שאלות:

1. תארו מקרה בו צפיתם בילדים צעירים (גילאי 6-3) אשר ביוזמתם (ללא התערבות מבוגר) העלו רעיונות כמותיים;
2. תארו מקרה בו במהלך אינטראקציה בין ילד צעיר (גילאי 6-3) למבוגר עלו רעיונות כמותיים.

המשתתפים ענו על השאלון באופן פרטני ובסביבה המתאימה להם, בנוכחות חבר בצוות המחקר.

ניתוח הנתונים החל בניתוח תוכן על פי נושאים ומושגים כמותיים המוזכרים בתכנית הלימודים במתמטיקה לגן הילדים ולאחר מכן בניתוח תוכן אינדוקטיבי כדי לבחון קטגוריות נוספות. חוקרת אחת קידדה את התיאורים שהמשתתפים כתבו לכל אחת מהשאלות, ולאחר מכן חוקרת שנייה אימתה את הקידודים. נמצאה הסכמה מלאה.

ממצאים

מניתוח הממצאים עולה כי מרבית המשתתפים (64 מתוך 90) תיארו רעיונות כמותיים אשר ילדים צעירים מעלים ללא התערבות מבוגר. שנים־עשר מתוכם רשמו יותר מרעיון כמותי אחד. מספר דומה של משתתפים (65) תיארו רעיונות כמותיים העולים באינטראקציה בין ילדים צעירים לבין מבוגרים, כאשר חמישה מתוכם רשמו יותר מרעיון כמותי אחד. כרבע מהמשתתפים (24 בהתייחס לשאלה הראשונה ו־23 בהתייחס לשאלה השנייה) לא ענו על שאלות אלו או כתבו במפורש שהם לא זוכרים מקרה כזה ("לא עולה לי משהו ספציפי"). נציין כי שני משתתפים טענו כי לדעתם ילדים צעירים לא מעלים מיוזמתם רעיונות כמותיים ולא השיבו על השאלה שהתייחסה לרעיונות כמותיים שעולים באינטראקציה בין ילדים למבוגרים.

נתייחס כעת למשתתפים אשר תיארו רעיונות כמותיים שילדים מעלים ביוזמתם ולרעיונות שעולים באינטראקציה בין ילדים למבוגרים. מ**טבלה 1** ניתן לראות כי מניתוח הנתונים נמצאו שבע קטגוריות של רעיונות כמותיים שהוצגו על ידי המשתתפים במחקר בהתייחס לרעיונות שילדים מעלים ביוזמתם ולכאלו שעולים באינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים. שתי קטגוריות נוספות הוגדרו בהקשר לשאלה שהתייחסה לרעיונות כמותיים שעולים באינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים.

טבלה 1

שכיחות הרעיונות הכמותיים שהמבוגרים ציינו – ללא התערבות מבוגר/באינטראקציה עם מבוגר

רעיונות כמותיים	מנייה	ספירה	השוואת קבוצות	תרגילי חשבון	כסף	זיהוי סמל המספר	הרכבה ופירוק המספר	גיל/ זמן	חצי	**סך הכל**
ללא התערבות מבוגר	25	11	18	9	7	4	2	0	0	**76**
באינטראקציה עם מבוגר	19	6	9	12	9	3	6	5	1	**77**

מ**טבלה 1** רואים כי מספר הרעיונות ללא התערבות מבוגר דומה למספר הרעיונות באינטראקציה בין ילדים ומבוגרים (76 ו־70 בהתאמה). *מנייה* הוזכרה בשכיחות הגבוהה ביותר בשני המצבים ובשכיחות גבוהה יותר בתיאורים שלא כללו התערבות מבוגר. כך למשל, בהקשר לתיאור מקרה ללא התערבות מבוגר נכתב: "בתי בת ארבע וחצי לקחה כיסאות וסידרה אותם בשורה ולאחר מכן ספרה אותם", ודוגמא לאינטראקציה בין ילד לבין עם מבוגר: "כשאני קוראת עם האחיין שלי ספר אנחנו סופרים את התמונות שיש בספר". מרבית המשתתפים השתמשו במילה לספור (במקום למנות) אך התכוונו למניית עצמים.

גם בקטגוריות *ספירה* ו*השוואת קבוצות* מספר המשתתפים שתיארו רעיונות כמותיים שהילדים מעלים בעצמם (ללא התערבות מבוגר) גדול ממספר המשתתפים שציינו היבטים אלו בהקשר לאינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים. בקטגוריה *ספירה* כללנו תיאורים שהדגש בהם היה על אמירה של רצף מילות המספר ולא למנייה של כמויות. למשל, "הבן שלי אוהב לספור מאחד עד עשר". בקטגוריה זו כללנו גם תיאורי פעילויות המשלבות ספירה ותנועה. למשל, "הילד שלי בן שלוש סופר צעדים עד שהוא מגיע לרכב"; "אנחנו עולים במדרגות ותוך כדי העלייה סופרים." מקרים אלה סווגו כ*ספירה* ולא כ*מנייה*, כיוון שההתמקדות בפעילות הייתה באמירת מילות המספר ברצף, ולא בידיעה כמה מדרגות מטפסים או כמה צעדים צועדים. הקטגוריה *השוואת קבוצות* כללה, בעיקר, התייחסות למצבים בהם ילדים השוו כמויות (למשל, "ילד מראה שאצלו בצלחת יש יותר / פחות אוכל מאשר בצלחות האחרות") או יצרו כמויות שוות (למשל, "שתי חברות שחקו במשחק עם הרבה בובות וחילקו ביניהן את הבובות כדי שיהיה שווה בשווה.")

בקטגוריית *הרכבה ופירוק המספר* תוארו יותר רעיונות במצבי מעורבות ילדים עם מבוגרים מאשר רעיונות שעולים אצל ילדים ללא מעורבות מבוגר. למשל, "מבוגר מחזיק מספר שונה של חטיפי בוטנים בכל יד ושואל: כמה חטיפים בסך הכל יש לי?"; "כשאנחנו מזמינים פיצה שלמה. אני שואלת את הילד: אם אני אוכלת עוד פרוסה, כמה פרוסות יישארו לכל האחרים"?. גם בקטגוריה *פעולות חשבון* נמצא מספר רב יותר של התייחסויות לפעילויות במהלך אינטראקציה בין ילדים למבוגרים (למשל, "אני מבקש מהילד שלי לפתור תרגילי חיבור וחיסור") מאשר ללא התערבות מבוגר (למשל, "הבן שלי, ישי, בן ארבע, אומר כל מיני תרגילי חשבון כמו למשל, שתיים ועוד שתיים שווה ארבע או עשר ועוד אחד שווה 11.")

מ**טבלה 1** ניתן לראות כי מספר דומה של משתתפים התייחסו ל*זיהוי סמל המספר* כאשר התבקשו לתאר רעיונות כמותיים שהילדים מעלים בעצמם וכאשר התבקשו לציין רעיונות כמותיים שעולים באינטראקציה בין מבוגר וילד. למשל, "ילד הולך ברחוב ומזהה את המספרים על הבתים או על לוחות הרישוי"; "משחק ריבועים עליהם רשומים מספרים מאחד עד עשר, הבת שלי בת 3 ביקשה שאני אגיד לה מספר והיא תקפוץ על המספר שאני אגיד לה."

בקטגוריה *כסף* הוצגו רעיונות כמותיים שונים, למשל, "כשמגבילים אותו בחנות בסכום כסף והילד שואל אם מה שבחר עומד בתקציב"; "צפיתי באחיין שלי ששאל את אמא שלו באשר לעודף שקיבלה כאשר קנתה לו ארטיק". גם בקטגוריה זו מספר הרעיונות שהועלו בהקשר לשתי השאלות דומה.

כפי שניתן לראות מ**טבלה 1**, שני רעיונות כמותיים תוארו רק באינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים. משתתפת אחת התייחסה למושג *חצי* ורשמה: "מבוגר אומר לילד: אל תמלא כוס מלאה, מלא רק חצי." חמישה משתתפים התייחסו להיבטים כמותיים בהקשרים של *גיל וזמן*: "הילד שואל: בן כמה

אני? מתי הולכים?;" "הבת שלי תמיד שואלת מתי מגיעים? כשהייתה בת חמש הפסקנו לענות לה, אמרנו לה מה השעה ובאיזו שעה מגיעים והיא חישבה את הזמן."

דיון ומסקנות

מהממצאים עולה כי כ־70% מהמשתתפים תיארו רעיונות כמותיים שילדי גן מעלים בעצמם וכאלו שעולים באינטראקציה בין ילדים לבין מבוגרים. יתכן שלמשתתפים שכתבו כי אינם זוכרים מקרים כאלו אין קשר יומיומי עם ילדי גן. מחקר עתידי עשוי לחקור את ההבדלים בין תגובות הורים לבין תגובות מבוגרים אחרים שיש להם קשר עם ילדי גן וכן תגובות מבוגרים שאין להם בנקודת הזמן בה יערך המחקר קשר עם ילדי גן. כמו כן, ייתכן כי מבוגרים שציינו כי אינם זוכרים מקרים כאלה לא רואים חשיבות להתמקדות בהיבטים כמותיים בגיל הרך או מאמינים כי תפקיד הגננות הוא לפתח רעיונות אלו ולא תפקידם.

חלק ניכר מהרעיונות הכמותיים שתוארו על ידי המשתתפים במחקר כלולים בתכנית הלימודים במתמטיקה לגן הילדים. בנוסף, מרבית הרעיונות שהציגו המבוגרים היו כלליים ולא התייחסו לפרטים. מתוך מודעות לחשיבות ההתייחסות לפרטים בעיצוב משימות לילדי גן, מתעוררת השאלה: כיצד לעלות את מודעות המבוגרים לפרטים שיש להתייחס אליהם בהצגת פעילויות שמטרתן קידום חשיבה מתמטית של ילדי גן. למשל, בהקשר לעקרונות המנייה (Gelman & Gallistel, 1987), יש לעורר את מודעות המבוגרים לכך שגם אם ילד מפגין, במהלך מניית חמישה חפצים, שליטה בעקרון ההתאמה החד־חד־ערכית תוך אמירת מילות המספר בסדר הנכון, הוא לא בהכרח שולט בעקרון הקרדינליות (כלומר, לא בהכרח יידע לומר, בסיום התהליך, כי בקבוצה חמישה חפצים). כמו כן, יש חשיבות להעלאת המודעות לחשיבות טיפוח מיומנויות ספירה, בנוסף לספירה מאחת קדימה (למשל, ספירה לאחור, ספירה בדילוגים, ספירה ממספר כלשהו שאינו אחד). כלומר, יש מקום להעצים את ידע המבוגרים לגבי פיתוח היבטים כמותיים בגילאים צעירים ולגבי פעילויות מתאימות.

לאור החשיבות שיש לטיפוח חשיבה מתמטית של ילדי גן גם בסביבה הביתית (Zippert, & Rittle-

Johnson, 2020), יש מקום לעריכת מחקרים נוספים הבוחנים ידע ועמדות של מבוגרים בהקשר להתייחסות להיבטים מתמטיים בהם עוסקים בגני הילדים ולהתייחס לאוכלוסיות שונות של מבוגרים. מחקרים אלה נחוצים לצורך תכנון סדנאות למבוגרים שמטרתן קידום יכולות מספריות של ילדים צעירים גם בסביבה הטבעית של הילדים ולא רק בגני הילדים.

המחקר שמתואר במאמר זה ממומן על ידי הקרן הלאומית למדע (מענק מחקר 18/1631)

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות (2010). תכנית לימודים במתמטיקה לגן הילדים. האגף לתכנון ופיתוח תכניות לימודים, ירושלים.

Anders, Y., Rossbach, H. G., Weinert, S., Ebert, S., Kuger, S., Lehrl, S., & von Maurice, J. (2012). Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. *Early Childhood Research Quarterly*, *27*(2), 231-244.

Clements, D., Sarama, J., Spitler, M., Lange, A., & Wolfe, C. B. (2011). Mathematics learned by young children in an intervention based on learning trajectories: A large-scale cluster randomized trial. *Journal for Research in Mathematics Education*, *42*, 127–166.

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge: Harvard University Press.

Ginsburg, H. P. (2016). Helping early childhood educators to understand and assess young children's mathematical minds. ZDM The International Journal on Mathematics Education, *48*(7), 941-946.

Ginsburg, H. P., Lee, J. S., & Boyd, J. S. (2008). *Mathematics education for young children: What it is and how to promote it*. Social Policy Report, XXII(I), 1-22.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters:

kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, *45*(3), 850-867.

Lewis Presser, A., Clements, M., Ginsburg, H., & Ertle, B. (2015). Big math for little kids: The effectiveness of a preschool and kindergarten mathematics curriculum. *Early education and development*, *26*(3), 399-426.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Tsamir, P., Tirosh, D., Levenson, E., Barkai, R., & Tabach, M. (2015). Analyzing number composition and decomposition activities in kindergarten from a numeracy perspective. *ZDM Mathematics Education*, *47*(4), 639-651.

Zippert, E. L., & Rittle-Johnson, B. (2020). The home math environment: More than numeracy. *Early Childhood Research Quarterly*, *50*, 4-15.

ידע של גננות לגבי משימות דגם חוזר ודגם צומח, ותחושת החוללות העצמית שלהן לגבי ידע זה

איריס שרייבר, אוניברסיטת בר אילן, מכללת סמינר הקיבוצים

מבוא ורקע תיאורטי

קידום ידע מתמטי של ילדים כבר מגיל הגן מומלץ הן בתוכניות לימוד והן בספרות המחקרית, על מנת לבנות את היסודות המתמטיים למגוון נושאים ומושגים אותם ילמדו הילדים בבית הספר (Clements & Sarama, 2011; NCTM, 2000; Nguyen et al. 2016). אחד הנושאים הנלמדים במסגרת תוכנית הלימודים במתמטיקה בגן הילדים הינו נושא ה**דגמים**. לימוד נושא הדגמים חשוב מאחר שהוא מפתח היבטים שונים של חשיבה מתמטית וזיהוי תבניות (Warren, 2005). בתוה"ל בישראל מציינים כי: "עיסוק בדגמים חוזרים מוביל את הילד לחשיבה גבוהה – יכולת להכליל" (משה"ח, 2010).

תהליך אפקטיבי של הוראה־למידה מושפע מגורמים שונים. אחד מהם הוא ידע של מורים (וגננות), גורם שנמצא על ידי חוקרים רבים כנדרש להוראה יעילה במתמטיקה. חוקרים הגדירו ארבעה מרכיבי ידע הנדרש להוראה (Ball, Thames & Phelps, 2008): ידע תוכן שגרתי (למשל, ידע לפתור תרגיל), ידע תוכן לא שגרתי (למשל, ידע של דרכי פתרון נוספים לבעיה), ידע פדגוגי של תוכן והוראה (למשל, ידע של דרכי ייצוג/המחשה לבעיה) וידע פדגוגי של תוכן ותלמידים (למשל, ידע לגבי שגיאות אופייניות של תלמידים או מה קל/קשה לאוכלוסיית תלמידים מסוימת). מחקרים בנושא דגמים בגן הילדים, שחקרו היבטים שונים של ידע גננות, מראים שמחד הן יודעות לפתור משימות דגמים, לתאר דגמים ולהבחין בשגיאות שילדים מבצעים. מאידך, הן אינן מכירות משימות מגוונות, אינן בקיאות באופן חשיבתם של ילדים ולעיתים לא יודעות מה צריך לעשות ואילו משימות לתת כדי לקדם את הידע של הילדים (Economopoulos, 1998; Waters, 2007; Zhang, 2015)). מחקר שבדק ידע של גננות בנושאים הנלמדים בגן (Lee, 2010) מצא כי בנושא דגמים יש לגננות ידע רחב של תוכן והוראה. עם זאת, המחקר של Lee לא בחן את ידע הגננות בהקשר לילדים ובאופן כללי מרכיב ידע זה לא נחקר מספיק, למיטב ידיעתי, בנושא דגמים. על כן המחקר הנוכחי מתמקד בידע פדגוגי של תוכן ותלמידים, שהוא שילוב של ידע התוכן עם היכרות עם תלמידים.

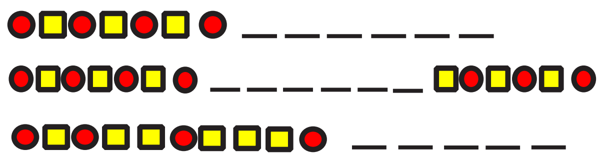
הגורם השני שנבדק הוא גורם מתחום הרגש – חוללות עצמית (self- efficacy). מונח זה הוצג לראשונה על ידי בנדורה והוגדר כמידת הביטחון של אדם ביכולתו לארגן ולבצע בהצלחה את הדרוש לשם השגת תוצאה רצויה (Bandura, 1986). רמת החוללות העצמית משפיעה על ביצועי אנשים ועל משך הזמן והמאמץ שישקיעו בביצוע משימות מסוימות (Dellinger et al, 2008). בפרט, בתהליך ההוראה תפקוד המורה בכיתה יכול להיות קשור ברמת הביטחון שלו למלא את תפקידו בהצלחה. אכן, מחקרים מצאו כי חוללות עצמית עשויה להשפיע באופן משמעותי על איכות ההוראה של המורים (Brouwers & Tomic, 2000). תחושת חוללות עצמית נבדקת בהתייחס לנושא ספציפי, ונושא הדגמים לא נחקר מספיק בהקשר זה. המחקר הנוכחי בדק את החוללות העצמית של הגננות בהתייחס לידע שלהן לגבי תוכן ותלמידים בנושא דגמים.

בהתייחס לשני הגורמים הללו, הוגדרו **מטרות המחקר:** 1. בדיקת ידע של תוכן ותלמידים של הגננות בנושא דגמים: האם הגננות יודעות אילו משימות דגמים קלות יותר לתלמידים ואילו קשות יותר? האם הגננות מכירות שגיאות נפוצות של ילדים במשימות דגמים? 2. בדיקת רמת החוללות העצמית של הגננות: מהי רמת הביטחון של הגננות בהתייחס לידע שלהן (של תוכן ותלמידים) בנושא דגמים?

מתודולוגיה

המחקר נערך בשני שלבים, ראשית עם ילדים ואז עם גננות (בו מתמקד מאמר זה). השלב הראשון, "המחקר המקדים", בחן ידע של ילדים בנושא דגמים. המשתתפים הם 206 ילדים: 99 ילדים בגילאי 4-5 (טרום חובה) ו־107 ילדים בגילאי 5-6 (גן חובה). כל הילדים למדו בגנים באותו אזור במרכז הארץ ובעלי אותו מדד סוציו-אקונומי (כפי שנקבע על ידי משרד החינוך בישראל). כל גן ילדים כלל כ־30 ילדים, בני 4-6. לילדים בגילאי 4-5 זו הייתה השנה הראשונה בגן, ולילדים בגילאי 5-6 זו הייתה השנה השנייה בגן. המחקר אושר על ידי המדען הראשי של משרד החינוך בישראל.

הילדים ענו על שלוש משימות: המשך של דגם חוזר, השלמה של דגם חוזר והמשך של דגם צומח.



מטרת המחקר המקדים היא לבחון כיצד ילדי גן משיבים לשלוש משימות הדגמים: מהו אחוז התשובות הנכונות (שהן בהלימה לחוקיות הדגם), ומהם הפתרונות השגויים (שאינם בהלימה לחוקיות הדגם). בשלב השני של המחקר, בו מתמקד מאמר זה, השתתפו 60 גננות, לכולן תואר ראשון והן מלמדות בגני ילדים בחינוך הרגיל. למחציתן ותק של מעל 10 שנים ולמחציתן ותק של מתחת ל־10 שנים.

כלי המחקר הם שני שאלונים: שאלון חוללות עצמית ושאלון ידע. השאלונים התייחסו לשלוש המשימות עליהן ענו הילדים במחקר המקדים.

שאלון החוללות העצמית של הגננות הינו שאלון עמדות, בו התבקשו הגננות לדרג את רמת הביטחון ביכולתן לצפות מראש שגיאות של ילדים, ואת רמת הביטחון ביכולתן להעריך את אחוזי ההצלחה של הילדים, בכל משימה מבין שלוש המשימות עליהן ענו הילדים במחקר המקדים ("המשך דגם חוזר", "השלם דגם חוזר", "המשך דגם צומח"). הגננות דירגו את הביטחון ביכולתן החל מ־1 (בכלל לא בטוחה ביכולתי), ועד ביטחון מלא (5 - בטוחה מאוד ביכולתי).

שאלון הידע נערך עם הגננות לאחר שהן מילאו את שאלון החוללות העצמית והוא נעשה בזיקה ישירה לשאלוני הילדים: על מנת שידע הגננות ייבדק בהלימה לידע הילדים נעשה שימוש באותו שאלון שעליו ענו הילדים ואליו התבקשו הגננות להתייחס. הגננות התבקשו לציין כיצד, לדעתן, עונים ילדים בפתרון כל אחת מהמטלות: מה יהיו, לדעתן, אחוזי ההצלחה של ילדים בגילאים שונים לכל אחת מהמטלות, ומה יהיו השגיאות בפתרונות הילדים לכל אחת מהמטלות.

ממצאים

ממצאי חוללות עצמית

באופן כללי, הגננות דירגו את רמת הביטחון שלהן גבוה, בין 3 ל־5. עם זאת, רמת הביטחון שלהן ביחס למשימת "המשך דגם חוזר" נמצאה גבוהה יותר מאשר בשתי המשימות האחרות, רמת הביטחון שלהן ביחס לידע לגבי הצלחת ילדים נמצאה גבוהה יותר מאשר ביחס לידע לגבי שגיאות ילדים, ונמצא מתאם חיובי בין ותק הגננות לבין רמת הביטחון שלהן ביכולתן הן לחזות טעויות של ילדים והן לחזות את אחוזי ההצלחה של ילדים.

ממצאי ידע פדגוגי של תוכן ותלמידים

במחקר המקדים ביצעו הילדים מספר שגיאות (כלומר המשיכו/השלימו דגם באופן שאיננו עונה על החוקיות של הדגם), שגיאות שהוזכרו גם בספרות המקצועית. בדגם חוזר נצפו המשך/השלמת הדגם על ידי חזרה על איבר אחד בהתמדה, המשך/השלמת הדגם באופן אקראי והמשך/השלמה על ידי העתקה של חלק הדגם הנתון. הטעות של העתקת הדגם הייתה הטעות הנפוצה ביותר. בדגם הצומח נצפו המשכים שגויים של חזרה על אותו איבר בהתמדה או המשך אקראי וכמו כן הופיעה השגיאה של המשך הדגם הצומח עם דגם חוזר. השגיאה הנפוצה ביותר גם בדגם זה הייתה המשך הדגם על ידי העתקה שלו או של חלק ממנו (העתקה משמאל לימין או העתקת ראי).

במחקר התבקשו הגננות לציין שגיאות שלדעתן ילדים עושים בהמשך/השלמה של דגמים נתונים. הגננות ציינו חלק מהטעויות שהילדים עשו, אך ציינו גם טעויות שהילדים לא ביצעו, והן לא הזכירו את השגיאה הנפוצה ביותר (העתקת הדגם) המוכרת ומוזכרת גם בספרות המקצועית.

בהתייחס לידע לגבי מה קל או קשה לילדים הגננות התבקשו לציין מה יהיה אחוז ההצלחה של הילדים במשימות. הממצאים (ראו **טבלה 1**) מעידים כי הגננות נטו להערכת חסר של ביצועי הילדים במקרהשל דגם חוזר או להערכת יתר על ביצועי הילדים במקרה של דגם צומח.

טבלה 1

השוואה בין אחוזי ההצלחה בפועל של הילדים לבין אחוזי ההצלחה שהעריכו הגננות

	ילדים בגן טרום חובה (גיל 4-5)			ילדים בגן חובה (גיל 5-6)		
	אחוז ההצלחה של הילדים	אחוז ההצלחה שהעריכו הגננות	הבדל (t-value)	אחוז ההצלחה של הילדים	אחוז ההצלחה שהעריכו הגננות	הבדל (t-value)
המשך דגם חוזר	71.0	69.0 (18.0)	-1.17	88.8	89.3 (10.2)	0.34
השלם דגם חוזר	77.8	60.0 (22.3)	-6.17 **	94.4	80.3 (18.2)	-6.0 **
המשך דגם צומח	3.0	13.2 (14.4)	5.44 **	7.5	38.1 (21.4)	11.11 **

** p<0.01

ממצאי **טבלה 1** ממחישים כי הגננות העריכו נכון כי משימת הדגם הצומח קשה יותר לילדים מאשר משימות הדגם החוזר, אך העריכו בצורה שגויה כי השלמת דגם חוזר קשה יותר מהמשך דגם חוזר. ניתן לראות כי במקרים בהם הגננות העריכו לא נכון את ביצועי הילדים, הפער בין הערכתן לאחוזי ההצלחה בפועל של הילדים היה משמעותי ביותר.

דיון ומסקנות

המחקר הנוכחי בדק ידע פדגוגי של גננות לגבי ילדים בנושא דגמים ואת החוללות העצמית שלהם ביחס לידע זה. על פי מחקרים קודמים קיימת חשיבות לידע פדגוגי של מורים: מורה שיודע מה קל או קשה עבור התלמידים שלו, ויודע מהן הטעויות הנפוצות של התלמידים, יכול לבחור את המשימות המתאימות לפיתוח הידע של התלמידים; יכול למקד את ההסברים שלו ולקדם את החשיבה המתמטית של התלמידים. הכרות זו משפרת את האיכות והדיוק של תהליך ההוראה: מורים הצופים מראש טעויות אופייניות ואת הסיבות הגורמות להם עשויים לכלול דיונים על טעויות אלה תוך כדי ההוראה – ובכך להעמיק את הבנת הילדים.

במחקר הנוכחי, ממצאי הידע הפדגוגי לגבי תשובות ושגיאות טיפוסיות של ילדים מעידים על פערים בידע של הגננות. ראשית, הן לא הצליחו לחזות את הטעות הנפוצה ביותר אצל הילדים – העתקת הדגם: מחצית מהגננות לא ציינו זאת במשימות דגם חוזר, וכל הגננות לא ציינו זאת במשימת הדגם הצומח. שגיאה זו מוכרת בספרות המקצועית ונצפתה גם במחקר המקדים של המחקר הנוכחי. שגיאה זו מרמזת כי השיטה בה ילדים רבים משתמשים לפתרון משימות דפוס היא העתקה, במקום לזהות את המבנה או להכליל. ילדים יכולים להצליח להמשיך דגם באמצעות גישה פרוצדורלית או קצבית (Threlfall, 1999). על כן חשוב שהגננות יפנו את תשומת ליבם של הילדים לסדירות ולרצף. רק בדרך זו, דגמים חוזרים עשויים להוות בסיס להכללה ולחשיבה אלגברית. העובדה שהגננות לא חזו שגיאה זו מרמזת שהן אינן מודעות לכך שילדים משתמשים בגישה כזו ושאולי הן לא שמות דגש מספיק על מבנה וחוקיות הדגם במהלך תהליך ההוראה.

בהתייחס ליכולת לצפות מה קל או קשה לילדים – מורים שאינם יודעים מה קל או קשה לילדים עשויים להימנע מללמד משימות מעוררות מחשבה שעשויות לעזור להעמיק את הבנת הילדים את החומר רק מכיוון שהם חושבים שזה קשה מדי; או ללמד משימות שלדעתם קלות אך למעשה הן קשות מדי לילדים, ובכך מתסכלות אותן. במחקר זה הממצאים לגבי הצלחת ילדים העידו כי הגננות לא העריכו נכון את רמת הקושי וכי הן נוטות להערכת חסר או להערכת יתר של הילדים.

המחקר בדק גם את החוללות העצמית של הגננות ביחס לידע שלהן לגבי ילדים, גורם חשוב בתהליך הלמידה. ממצאי המחקר הנוכחי מראים כי הגננות היו בטוחות יותר בדגם או במשימה בהם הן התנסו בגן והיו בקיאות בהם יותר, ופחות בטוחות לגבי סוג דגם או משימה בהם הן היו פחות בקיאות ומנוסות. הייתה הלימה בין רמת הביטחון לידע: כשהגננות בטוחות יותר הן גם מגלות יותר ידע.

ממצאי המחקר משליכים על עבודת הגננות ועל הכשרתן בנושא הדגמים: יש לכלול בתהליך ההוראה של נושא הדגמים דגש על החוקיות ועל ההכללה של הדגם וכן לחשוף את הגננות לדרכי חשיבה של ילדים העלולים להוביל לשגיאות אופייניות, כמו גם לעודד גיוון בסוגי דגמים ומשימות.

רשימת מקורות

משרד החינוך והתרבות (2010). תוכנית לימודים במתמטיקה לגני ילדים בישראל לחינוך הממלכתי והממלכתי דתי. ירושלים: ת"ל.

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching – What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59(5),* 389-407.

Bandura, A. (1986). *Social Foundations of Thought and Action: A Social Cognitive*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.

Brouwers, A. & Tomic, W. (2000). A longitudinal study of teacher burnout and perceived self-efficacy in classroom management. *Teacher and Teaching Education, 16 (2)*, 239-253.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2011). Early childhood mathematics intervention. *Science, 333(6045),* 968-970.

Dellinger, A., Bobbett, J., Olivier, D. & Ellett, C. (2008). Measuring teachers' self-efficacy beliefs: Development and use of the TEBS- Self. *Teaching and Teacher Education, 24(3),* 751-766.

Economopoulos, K. (1998). What comes next? The mathematics of pattern in kindergarten. *Teaching Children Mathematics, 5(4),* 230-233.

Lee, J. (2010). Exploring kindergarten teachers' pedagogical content knowledge of mathematics. *International Journal of Early Childhood, 42(1),* 27-41.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for school mathematics. Reston, Virginia, USA: NCTM.

Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C., & Spitler, M. E. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement?. *Early childhood research quarterly*, *36*, 550-560.

Threlfall, J. (1999). Repeating pattern in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.18-29). London and New-York: Cassel.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early algebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce & A. Roche (Eds.), Proceedings of the 28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne. Building connections: Research, theory and practice (Vol. 1, pp. 759–766). Sydney, Australia: MERGA.

Waters, J. (2007). Mathematical patterning in early childhood settings. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceeding of the 30th Annual Conference of the Mathematical Education Research Group of Australia* (2, pp. 565-572). Sydney: MERGA.

Zhang, Y. (2015). *Pedagogical content knowledge in early mathematics: What teachers know and how it associates with teaching and learning*. A dissertation submitted for the degree of Ph.D. Chicago, USA: Loyola University.

שיח מחקרי

חוש למספרים ואופן הוראתו בכיתה – אמונות וידע של מורים המלמדים מתמטיקה בבית ספר יסודי

מאיה שטיינברג אפל, צביה מרקוביץ

סמינר הקיבוצים – המכללה לחינוך, לטכנולוגיה ולאמנויות

מבוא

בעשורים האחרונים חלו תמורות משמעותיות בתכנים ובסגנון של הוראת המתמטיקה בבתי הספר היסודיים. בעבר הגישה הרווחת היתה שיש ללמד מתמטיקה באמצעות תרגול ושינון עד שהתלמיד שולט באלגוריתם המתמטי, אך עם השנים חלחלה ההבנה שבמקום ללמד רק פרוצדורות חישוביות, יש גם לפתח בקרב התלמידים את החוש למספרים (Number sense). לפיכך, כיום מדגישים העקרונות והסטנדרטים של החינוך המתמטי בעולם את הצורך בבניית ידע מתמטי משמעותי בקרב תלמידים באמצעות פיתוח חוש למספרים (NCTM, 2000; OECD, 2014).

העיסוק בחוש למספרים נחשב נושא מרכזי בחינוך המתמטי במדינות רבות מאחר והוא מתמקד ביכולת להבין את הקשרים בין מספרים לפעולות, ביכולת להשתמש במספרים בצורה גמישה, להשתמש באומדן ולשפוט סדרי גודל של מספרים, לשפוט הגיון של תשובות, לעבור בין הצגות שונות של מספרים ולקשר בין תשובות שמקבלים ובין המציאות (Markovits & Sowder, 1994; Yang & Jan, 2019). בישראל מדגישה תכנית הלימודים במתמטיקה (משרד החינוך, התרבות והספורט, 2006) את פיתוח החוש למספרים בקרב תלמידים ומבהירה כי העיסוק בחוש למספרים מהווה "חלק מהתרבות המתמטית, והוא כולל תפיסה אינטואיטיבית איכותית של התחום הנלמד, יכולת ראייה חזותית של מצבים שונים, והסתמכות על קישור חלקי ידע שנלמדו בעבר" (עמ' 11).

הספרות המקצועית מתארת באופן עקבי כי לומדים רבים בגילאים שונים מתקשים להתמודד עם משימות המזמנות שימוש בחוש למספרים (Mullis, Martin, Foy & Arora, 2012; NCTM, 2000; OECD, 2014; Yang & Jan, 2019). ואולם, על אף הקושי, ישנם מחקרים המראים כי החוש למספרים, על אף היותו יכולת אינדיבידואלית אשר נמצאת אצל תלמידים שונים ברמה ובאיכות שונה, באפשרותו להתפתח ולהשתכלל בהתאם להתנסויות אליהן נחשף התלמיד בכיתה (Boaler, 2015). חוקרים מצביעים על כך שלמורים יש תפקיד חשוב בפיתוח החוש למספרים של תלמידיהם (Ball, Hill, & Bass, 2005; Yang & Hsu, 2009; Zübeyde & Artut, 2016) ובשיפור ביצועי התלמידים בתחום זה (Clarke-Courtney & Wessels, 2014).

ידע ואמונה בנושא החוש למספרים הם פרמטרים הנחוצים למורה לצורך פיתוח חוש זה בקרב התלמידים. ממחקרים שבהם השתתפו בעיקר סטודנטים להוראה ומספר מצומצם של מורים בפועל, נמצאו חוסר היכרות מספקת של הנושא, היצמדות להוראת אלגוריתמים סטנדרטיים, וחוסר הבנה עמוקה של עקרונות מתמטיים (סיוון, 2016; Tsao & Lin, 2012; Yang, 2007). בהקשר של אמונות המורים בנושא החוש למספרים, מצביעים המחקרים כי החוש למספרים יעשה משמעותי ובעל ערך עבור תלמידים רק אם המורים יאמינו כי פיתוח חוש למספרים חשוב יותר מאשר שליטה בחוקים ועובדות הקשורים לחישובים בכתב (Reys, 1994). במחקר שבוצע בטאיוון על הוראת החוש

למספרים בקרב תלמידים בכיתה ו' על ידי מורה מומחה בנושא זה, נמצא כי שילוב משימות העוסקות בחוש למספרים כחלק מהוראת המתמטיקה, נובע, בין היתר, מאמונתו כי חשיבה מתמטית מסדר גבוה נשענת על גמישות מחשבתית וייצוגים שונים של פתרונות שהינם פרמטרים המאפיינים חוש מפותח למספרים (Yang & Hsu, 2009). במחקר אחר שנערך בקרב גננות (Briand-Newman, Wong & Evans, 2012) נמצא כי הגננות כלל לא היו מודעות לתפקיד שיש לחוש למספרים בפיתוח המתמטיקה אצל ילדים בגיל צעיר.

בנוסף לידע המתמטי הדרוש למורה להוראת נושא החוש למספרים ולאמונה בחשיבות הנושא והעיסוק בו כחלק אינטגרלי מהוראת המתמטיקה, נדרש המורה לייצר סביבת למידה אשר מעודדת את פיתוח החוש למספרים (Yang, Reys & Reys, 2007; Siegler & Booth, 2005). מחקרים מצביעים על סבירות גבוהה שתלמיד יפתח חוש למספרים כשישתתף בפעילויות ייעודיות למטרה זו. פעילויות אלה בשילוב הוראה יעילה, יבטיחו הן חוש למספרים מפותח יותר בקרב התלמידים והן פיתוח חשיבה מתמטית ויכולת טובה יותר במתמטיקה באופן כללי (Cheng & Tsao, 2008).

פוקנר (Faulkner, 2009) מדגישה כי מורים צריכים הדרכה ייחודית שתעזור להם לפתח את החוש למספרים אצל תלמידים וכן יש לוודא כי בשטח מתבצע תהליך של פיתוח חוש למספרים בקרב התלמידים. המלצה דומה מופיעה במחקר של יאנג וג'אן (Yang & Jan, 2019) לפיהם יש לתת עדיפות במסגרות המכשירות מורים להעמקת ההבנה בנושא החוש למספרים ובמקביל להכשיר את המורים להוראת הנושא בכיתה.

לאור העובדה שהמחקרים מצביעים על כך שלמורה תפקיד מרכזי בפיתוח החוש למספרים של תלמידיו בכיתה, מתמקד מחקר זה באוכלוסיית המורים בפועל ובודק את הידע והאמונות שלהם בנושא חוש למספרים ואת אופן ומידת השילוב של הנושא בהוראה בכיתה.

שיטה

מחקר זה ביקש לבדוק את האמונות והידע של מורים בפועל המלמדים מתמטיקה בבית הספר היסודי ביחס לנושא החוש למספרים והוראתו בכיתה. לשם כך נשאלו שאלות המחקר הבאות:

1. מהן האמונות של מורים ביחס לשימוש בחוש למספרים כחלק מהוראת המתמטיקה?
2. מהן האמונות של מורים ביחס לחוש למספרים אצל תלמידים?
3. מהו ידע התוכן ומהו ידע התוכן פדגוגי שיש למורים בהקשר להוראת החוש למספרים?
4. כיצד ועד כמה מורים משלבים את נושא החוש למספרים בשיעורי המתמטיקה בכיתה?

אוכלוסיית המחקר כללה 68 מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א' עד ו' בבתי ספר יסודיים מאזורים שונים בארץ. רוב המורים הם מהמגזר היהודי (87%) והשאר מהמגזר הערבי (13%). ותק המורים נע בין שנתיים ל־30 שנה כאשר הותק הממוצע הוא 16 שנה. 57% מהמשתתפים הם בעלי תעודת הוראה במתמטיקה, 24% הם מורים שעברו התמקצעות במתמטיקה (ואינם בעלי תעודת הוראה במתמטיקה), 19% הם מורים ללא הכשרה מקצועית בהוראת מתמטיקה.

המחקר התבצע בשני חלקים: החלק הראשון כלל שאלון שהועבר לכל המשתתפים ועסק בבדיקת האמונות והידע של מורים ביחס לנושא החוש למספרים ואופן הוראתו בכיתה. חלקו השני של המחקר כלל ראיונות עומק עם 10 מורות אשר הסכימו להתראיין ולהרחיב את תשובותיהן בנושא.

ממצאים ודיון

מתוך ממצאי המחקר בנושא אמונות המורים ביחס לשימוש בחוש למספרים כחלק מהוראת המתמטיקה אשר התקבלו מהשאלונים וקיבלו חיזוק מהראיונות עולה, כי 90% מהמורים סבורים שחשוב לשלב משימות חוש למספרים בהוראת המתמטיקה ו־97% מהמורים סבורים כי למורה יש תפקיד מפתח בפיתוח החוש למספרים של תלמידיו. רוב המורים (67%) אף סבורים שקיים קשר בין הוראת הנושא בכיתה להישגי התלמידים. אולם על אף אמונות אלו, 71% מהמורים מצביעים על כך שבפועל רק חלק מהמורים משלבים את נושא החוש למספרים בהוראת המתמטיקה וקיים צורך לפתח את חוש למספרים של המורים.

בנושא אמונות של מורים ביחס לחוש למספרים אצל תלמידים נמצא כי כשני שליש מהמורים סבורים כי חוש למספרים קיים הן אצל תלמידים חזקים והן אצל תלמידים מתקשים ולכן משימות חוש למספרים מתאימות לכל התלמידים, ואילו כשליש מהמורים סבורים כי חוש למספרים מאפיין בעיקר תלמידים חזקים ועל כן משימות חוש למספרים מתאימות יותר לתלמידים אלו. רוב המורים, כשלושה רבעים מהם, מאמינים כי על אף הפער ביכולות התלמידים, יש ללמד את נושא החוש למספרים בכיתה.

באשר לידע תוכן וידע תוכן פדגוגי המצוי אצל המורים בקשר עם הוראת נושא החוש למספרים, ניכר הן מהשאלונים והן מהראיונות כי לרוב המורים (76%) יש את תשתית הידע הנדרשת כדי לזהות האם משימה מתמטית מזמנת שימוש בחוש למספרים או לא. ואולם רק אחוז נמוך מהמורים עושה שימוש בחוש למספרים בפתרון משימות מתמטיות. ממצאי המחקר מראים כי כאשר המשימות הן משימות חוש למספרים "שגרתיות", כאלה השכיחות בספרי הלימוד ותכנית הלימודים (*לדוגמא: התלמיד נשאל: למי מהתרגילים הבאים תהיה תוצאה גדולה יותר, לתרגיל הכפל (0.8 × 29) או לתרגיל החילוק (0.8 : 29) ? התלמיד ענה שלתרגיל הכפל תהיה תוצאה גדולה יותר כי כפל מגדיל וחילוק מקטין. כיצד היית מסביר/ה את דרך הפתרון של התרגילים בכיתה?*), אחוז גבוה יותר של מורים (55%) בוחר להשתמש בחוש למספרים בפתרון המשימות.

לעומת זאת המחקר מראה כי, חסר למורים ידע מעמיק ורחב יותר להתמודד עם משימות חוש למספרים ש"אינן שגרתיות" (*לדוגמא: כיצד היית מסביר/ה בכיתה את דרך הפתרון של התרגיל הבא* *= (8 × 25) : 75 × 32*) ומרבית המורים (71%) אינם משתמשים באסטרטגיות חוש למספרים בפתרון משימות שכאלה.

בנושא אופן ומידת השילוב של נושא החוש למספרים בשיעורי המתמטיקה בכיתה, על אף שרוב המורים השיבו כי הם משלבים את הנושא באופן קבוע, ניכר שקיימים גורמים שונים אשר בסופו של דבר, על פי תשובות המורים, מעכבים את השילוב הקבוע של הנושא בהוראה, כגון: מחסור במשימות בספרי הלימוד, חוסר התייחסות לנושא בתוכנית הלימודים, מחסור בזמן, הוראה מבוססת טכניקה, חוסר ידע של המורים ועוד. מתשובות המורים נראה כי הנושא החוש למספרים אינו תופס מקום מרכזי מספיק בהוראה כפי שדורשת תכנית הלימודים.

בתהליך ניתוח התשובות של המורות בראיונות ניתן היה לזהות דפוסים אשר חוזרים על עצמם אצל מורות שונות בכל אחד מהנושאים הנבדקים: אמונה, ידע ושילוב הנושא בפועל בכיתה. במבט כולל על תשובות המורות ביחס לאמונות ולידע שלהן בנושא החוש למספרים, ניתן לזהות שלוש רמות אשר אפיינו את תשובות המורות. ברמת האמונה ניתן לזהות אמונה: חזקה, בינונית או חלשה וברמת

הידע ניתן לזהות רמה: גבוהה, בינונית ונמוכה. בקרב שמונה מורות שרואיינו (מתוך עשר) נמצאה התאמה מלאה בין רמת האמונה שלהן בנושא החוש למספרים לרמת הידע שלהן בנושא ולמידת השילוב שלו בהוראה. לפיכך, מורות שהציגו רמת אמונה חזקה בנושא החוש למספרים הציגו, בהתאמה, רמת ידע גבוהה ושילוב קבוע של הנושא בהוראה; מורות שהציגו רמת אמונה חלשה, הציגו, בהתאמה, רמת ידע נמוכה ואופן שילוב לא קבוע של הנושא ומורות שהציגו רמת אמונה בינונית, הציגו, בהתאמה, רמת ידע בינונית ואופן שילוב לא קבוע של הנושא.

מחקר זה נותן פרספקטיבה נוספת אודות החשיבות שיש לידע ולאמונות מורים בנושא החוש למספרים שכן אלו עתידים להשפיע על שילוב הוראת הנושא בכיתה וכתוצאה מכך על הישגי הלומדים. על מנת להצמיח תלמידים בעלי חוש למספרים מפותח יש לחזק את בסיס הידע והאמונות של המורים בנושא.

ממצאי המחקר מראים כי המורים מודעים לחשיבות נושא החוש למספרים והצורך הקיים בשילובו כחלק אינטגרלי מהוראת המתמטיקה, אך הם מתקשים לעשות זאת מאחר וחסר להם ידע להתמודד עם כלל המשימות בנושא החוש למספרים, גם כאלה שאינן משימות שגרתיות.

בנוסף, מצביע המחקר על קשר שבין רמת הידע של המורים בנושא החוש למספרים לבין רמת האמונה שלהם בנושא ושילובו בפועל בהוראה. קיומם של שני הפרמטרים אלו – ידע ואמונה - ברמה גבוהה אצל המורה, תבטיח שילוב של הנושא באופן קבוע והוראה אשר תוכל לפתח את החוש למספרים של התלמידים.

רשימת מקורות

משרד החינוך, התרבות והספורט (2006). **תכנית לימודים במתמטיקה לביה"ס היסודי**, האגף לתכניות לימודים.

תום, ס' (2016). התובנה המתמטית של מורים ופרחי הוראה למתמטיקה בבית הספר היסודי. **החינוך וסביבו, שנתון סמינר הקיבוצים, ל"ח**. 233 – 259.

Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, *30* (3), 14–17, 20-22, 43-46.

Boaler, J. (2015). Fluency without Fear: Research Evidence on the Best Ways to Learn Math Facts. Youcubed.https://www.youcubed.org/wpcontent/uploads/2017/09/Fluency-Without-Fear-1.28.15.pdf

Briand-Newman, H., Wong, M., & Evans, D. (2012). Teacher subject matter knowledge of number sense. In J. Dinyal, L. Cheng, & S. Ng (Eds.). *Mathematics education: Expanding horizons*. 130–137.

Cheng, C. Y., & Tsao, Y. L. (2008). The design of number sense with fraction teaching. *Journal of Elementary Education*, *48*(6), 79-85.

Courtney-Clarke, M. & Wessels, H. (2014). Number sense of final year pre- service primary school teachers. *Pythagoras, 35*(1), 244-263.

Faulkner, V.N., (2009). Components of Number Sense an Instructional Model or Teachers, *Teaching Exceptional Children, 41* (5), 24-30.

Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.

Mullis, I.V.S., Martin, M.O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *The TIMSS 2011 international results in mathematics*. Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Boston College. Retrieved from http://timssandpirls.bc.edu/timss2011/international-resultsmathematics.html

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA.

OECD (2014). *PISA 2012 Results: What Students Know and Can Do - Student Performance in Mathematics, Reading and Science (Volume 1)*. Paris: OECD Publishing [online]. Available: http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-volume-i.htm [31 October 2014].

Reys, B. (1994). Promoting number sense in the middle grades. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *1*(2), 114-120.

Siegler, R. S. & Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. In J.I. D. Campbell (Ed.), Handbook of mathematical cognition, (pp. 197–212) New York: Psychology Press.

Tsao, Y. L., & Lin, Y. (2012). Elementary School Teachers' Understanding: Towards the Related Knowledge of Number Sense. *US-China Education Review*, B1, 17-30.

Yang, D. C. (2007). Investigating the strategies used by pre-service teachers in Taiwan when responding to number sense questions. *School Science and Mathematics*, *107*(7), 293-301.

Yang, D.C., & Hsu, C.J. (2009). Teaching Number Sense for 6th Graders in Taiwan. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(2), 92-109.

Yang, D.C., Reys, R. E., & Reys, B. J. (2007). Number sense strategies used by pre-service teachers in Taiwan. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *7*(2), 383-403.

Yang, D.C., & Jan H.J. (2019). The Study of Primary School Teachers' Performance on Number Sense. *International Journal of Information and Education Technology*, *9*(5), 342-349.

Zübeyde ER, Z., & Artut, P. (2016) An Investigation of Elementary School Teachers' Sense of Number. *US-China Education Review B*, *6*(4), 205-217.

איך מנהלים שיח מחויב בכיתת המתמטיקה? מבט על התפתחות מקצועית של מורים בבתי ספר יסודיים

מריט דרעי[1], רוני קרסנטי[2], ברוך שוורץ[1]

[1] האוניברסיטה העברית בירושלים; [2] מכון ויצמן למדע

מבוא

מחקרים מהעשור האחרון מראים כי צורות השיח הנפוצות בבתי הספר היסודיים הן שטחיות ואינן ממצות את האפשרויות לפיתוח החשיבה של התלמידים (Michaels & O'Connor, 2012). בשיעורי מתמטיקה בפרט, השיטה של הקניה ולאחריה למידה פרוצדורלית היא נפוצה ביותר. מורים רבים שבויים בדפוסים שספגו כתלמידים במשך שנים ואימצו כמורים, ושינוי פדגוגי המבוסס על הבניית ידע כאשר השיח המתמטי הוא במרכז, קשה למורים גם בשל מורכבות המקצוע וגם בשל חוסר בידע הנדרש כדי להנחות שיח אפקטיבי (Michaels & O'Connor, 2015). כדי לשנות זאת, על המורים לעבור תהליך פיתוח מקצועי, שיסייע להם ללמוד דפוסי שיח חדשים ולחשוב באופן רפלקטיבי על תהליכי ההוראה שלהם (Borko et al., 2008).

במרכז המחקר המדווח כאן נמצא המושג של שיח מחויב (accountable talk), שמשמעותו שיח מתחשב, אחראי ומחייב. שיח זה כולל שלושה ממדים: **מחויבות לקהיליית לומדים**, שמשמעותה קיום דיאלוג המבוסס על נורמות של שיתופיות וערכים חברתיים; **מחויבות לידע**, כלומר התבססות על עובדות, כללים, חוקים ודעת מומחים; ו**מחויבות לחשיבה ושכילה** (reasoning), המתבטאת בדגש על העמקת הבנה וקידום רעיונות באופן טיעוני ודיאלקטי (Michaels, O'Connor & Resnick, 2008). שיח מחויב מהווה מנוע חשוב ללמידה משמעותית וכדי ליישמו מוצעים למורה מגוון כלים, המסייעים להבניית הידע של התלמידים דרך פיתוח החשיבה, העמקת הידע וההבנה, פיתוח יכולת הטיעון ומיומנויות חברתיות (Chapin, O'Connor & Anderson, 2009).

בתכנית הלימודים במתמטיקה לבית הספר היסודי בישראל משנת תשס"ו (משרד החינוך, 2006), שילוב השיח בשיעורי מתמטיקה אינו מוזכר מפורשות. למרות זאת, הפיקוח על המתמטיקה מדגיש קיום שיח מתמטי בשיעור וממליץ על משימות שנועדו לכך, אך מורים רבים אינם יודעים כיצד ליישם משימות מסוג זה באופן אפקטיבי.

המחקר המדווח כאן כלל שלב של עיצוב תכנית לפיתוח מקצועי, שבמרכזה למידה של פרקטיקות שיח מחויב. הווידאו תפס מקום מרכזי בתכנית זו ככלי פדגוגי להדגמה וניתוח של פרקטיקות שיח מחויב. המחקר כלל גם רכיב של 'למידה בין מערכות' (learning across sites; Borko et al., 2008), כלומר אינטראקציות חוזרות בין סביבת הפיתוח המקצועי וסביבת הכיתה לאורך תקופת ההשתלמות, וכן רכיב של קיימות, שהתבטא בבדיקת אפקטיביות הפיתוח המקצועי והשלכותיו על הלמידה והיישום של המורים לאורך זמן.

המחברת הראשונה של הצעה זו עיצבה והפעילה את הפיתוח המקצועי וביצעה מחקר שעקב אחר התכנית ויישומה בכיתות, כפי שיפורט בהמשך. מטרת המחקר הייתה לאפיין את תהליך הלמידה של מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי, שנחשפו לפרקטיקות של שיח מחויב, באמצעות (I) אפיון

השיח של כלל המורים שהשתתפו בפיתוח המקצועי, במהלך מפגשי ההשתלמות; ו־(II) אפיון תהליכי היישום של 4 מורות שנבחרו למחקר עומק.

שאלות המחקר

מה מאפיין את שיח כלל המורים בהשתלמות? מה מאפיין את השיח של 4 המורות כאשר הן צופות בשיעורים של עצמן שתועדו בווידאו? מהי מידת הקיימות של השימוש בפרקטיקות שיח שנלמדו? האם קיים קשר בין מידת היישום שנמצאה אצל מורות שונות לבין מאפיינים אישיים כגון ההשכלה מתמטית, הגיל והוותק של המורות?

מתודולוגיה

המחקר הוא מחקר איכותני המשולב בנתונים כמותיים ומאופיין כמחקר לאורך זמן (longitudinal research; Fitzmaurice, Laird & Ware, 2012). המחקר משלב מספר חקרי מקרה (collective case studies; Baxter & Jack, 2008) שבמסגרתם הושווה אפיון הלמידה של המורות כחלק מקולקטיב בהשתלמות, לאפיון הלמידה הפרטנית שלהן כאשר ניתחו במהלך ראיונות פעולות שביצעו בכיתותיהן והתייחסו לקשיים, טעויות והסיקו מסקנות בעקבות הצפייה.

סביבת המחקר

ההשתלמות נערכה בשתי קבוצות, שלמדו על פי אותה תכנית, בשתי ערים שונות. בכל קבוצה ההשתלמות כללה 30 שעות ב־10 מפגשים לאורך שנת לימודים אחת. המורים למדו על פרקטיקות שיח מחויב מתוך צפייה בקליפים והתנסו בניתוח שיעורים מצולמים על פי מחוון שפותח למטרה זו. גם ההוראה בהשתלמות תוכננה כמודלינג של שיעור מתמטיקה מבוסס שיח מחויב, בו המורים השתתפו תחילה כתלמידים ואח"כ התקיים שיח רפלקטיבי על ההתנסות ומטה־שיח על הפרקטיקות.

עבור 8 מורות שנבחרו לשלב נוסף, המחקר כלל בנוסף לסביבת ההשתלמות גם את סביבת הכיתה שלהן. בכל כיתה של מורה כזו צולמו 3 שיעורים לאורך השנה: לפני תחילת ההשתלמות, באמצעה ובסופה. לאחר השיעורים התקיימו ראיונות אישיים מבוססי־וידאו.

מתוך 8 המורות הללו נבחרו 4 מורות לניתוח עומק (חקרי מקרה). בכיתות של מורות אלו צולם שיעור רביעי מספר חודשים לאחר סיום ההשתלמות לצורך בדיקת קיימוּת.

אוכלוסיית המחקר

בהשתלמות השתתפו 45 מורים למתמטיקה, בדרגות וותק ומומחיות שונות. מתוכם נבחרו 8 המורות לשלב הנוסף (4 מכל קבוצה). הבחירה נעשתה על פי טבלת דגימה כדי להבטיח ייצוג מגוון של מאפיינים שונים כגון גיל, ותק והשכלה. כל המורות לימדו בכיתות ד'-ו'.

הבחירה של 4 המורות למחקר העומק נעשתה על סמך שיעור 3 שצולם בסוף ההשתלמות והריאיון מבוסס־הווידאו בעקבותיו. הבחירה נעשתה מתוך הנחה, שבסוף התהליך ניתן לזהות – על פי הרמה והאיכות של השיח המחויב בכיתה ובראיון – אם התרחש יישום משמעותי של הנלמד, יישום חלקי, או שלא ניכר יישום כלל. בהתאם לכך נבחרו שני מקרים של יישום משמעותי, מקרה אחד של יישום חלקי ומקרה אחד שבו לא זוהה יישום. במידת האפשר הבחירה נעשתה כך שיתקבל גם גיוון במאפיינים אישיים כמו ותק, ניסיון והכשרה מתמטית.

בהצעה זו יוצגו ממצאים מתוך שני חקרי מקרה, של הילה ושל אפרת (שמות בדויים). הילה היא מורה חדשה (3 שנות ותק),אשר למדה הוראת מתמטיקה כחוג ראשי במכללה ואפרת היא מורה ותיקה מאד (20 שנות ותק) ללא הכשרה מתמטית פורמלית, שלימדה מתמטיקה לאורך כל שנותיה כמורה בבית ספר יסודי ולכן בעלת ניסיון רב.

איסוף, צמצום וניתוח של הנתונים

מפגשי ההשתלמות: כל המפגשים תועדו בווידאו. מתוכם נבחרו 6 מפגשים שתומללו במלואם.

שיעורי מתמטיקה: השיעורים שצולמו בכיתותיהן של המורות הנחקרות תומללו במלואם.

ראיונות: עם כל אחת מ־8 המורות נערך ראיון טרום־השתלמות שתועד ותומלל במלואו, וראיונות מבוססי-וידאו לאחר צילום שיעורים 2 ו־3 שתועדו בווידאו ותומללו במלואם.

ניתוח שיח המורים בהשתלמות נעשה באופן איכותני (Glaser & Strauss, 2017). מתוך התמלולים זוהו קטגוריות ראשוניות שאוחדו לתמות וקודדו. אפיון תהליך הלמידה והיישום בין מערכות לאורך זמן נעשה באמצעות ניתוח של חקרי מקרה (Baxter & Jack, 2008). שיעור 1 ושיעור 4 נותחו והושוו באמצעות שני כלים קיימים: ה־IQA (Instructional Quality Assessment; Boston, 2012) המתייחס לדירוג הרמה הקוגניטיבית ורמת השיח המחויב בשיעור, וכלי לקידוד מהלכי השיח המחויב בשיעור –(Heyd-Metzuyanim, 2019) Accountable Talk Coding (AT). הראיונות נותחו בניתוח איכותני ובאמצעות קידוד היבטים שונים אליהם התייחסה המורה והפערים בפרשנות שנמצאו בינה לבין החוקרת ביישום הפרקטיקות.

ניתוח הנתונים אִפשר לאפיין את שיח המורים בהשתלמות כקולקטיב ואת שיח המורות המשתתפות כפרטים. ניתוח היישום בפועל אפשר לבחון את תהליך ההטמעה לאורך זמן. מאפיינים אישיים כמו ותק והשכלה מתמטית נבדקו גם הם בהקשר למורות שהראו מידות שונות של שינוי בפרקטיקות בעקבות ההשתלמות לאורך זמן.

ממצאים ודיון

לגבי ההשתלמות נמצא, כי שיח המורים במפגשים התאפיין בשיתופיות, רפלקציה, התמקדות בניתוח סיטואציות ודיון בתכנים מתמטיים. לדוגמא, כ־30% ממבעי המורים סווגו כשיח על מתמטיקה ודרכי פתרון של בעיות מתמטיות, כ־35% מהמבעים סווגו כשיח על השיח המחויב ו־17% מהמבעים סווגו כרפלקציה מנקודת מבט אישית. נושאים כמו פדגוגיה כללית ונושאים שאינם קשורים לשיח מחויב תפסו מקום זניח בשיח. ממצאים אלה ואחרים, שמפאת מגבלת המקום לא יפורטו כאן, מראים כי ההשתלמות הייתה אפקטיבית והמטרות שנקבעו הושגו.

בקרב המורות שנחקרו במחקר עומק (חקרי המקרה) נמצאו דרגות שונות של איכות יישום הכלים שנלמדו בהשתלמות. נדגים זאת כאן בעזרת תקציר של שני חקרי מקרה.

הילה, מורה חדשה ובעלת הכשרה מתמטית, השתתפה בהשתלמות במידה בינונית. השתתפותה התאפיינה בחקירה ופרשנות של סיטואציות וברפלקציה. מאפיינים אלו נמצאו גם בראיונות, בהם הילה חקרה בין היתר טעויות שעשתה והעלתה קשיים ותובנות, התייחסה להיבטים מתמטיים של השיח המחויב יותר מאשר להיבטים דיאלוגים גנריים, והציגה גישה הבנייתית עקבית. הפרשנות שנתנה ליישום הפרקטיקות בכיתתה היו לרוב בהלימה לפרשנות החוקרת. מהשוואת השיעור

הראשון והאחרון של הילה עולה כי הילה שיפרה משמעותית את רמת הדרישה הקוגניטיבית מתלמידיה ואת רמת השיח המחויב בשיעוריה. בשיעור הראשון שקודד נמצאה רמה נמוכה בשני המדדים (הציון ממוצע של כלל רכיבי ה IQA היה 1.9 מתוך 4), ואילו בשיעור האחרון נמצאה רמה גבוהה (ציון ממוצע 3.8). השינויים שנמצאו התבטאו למשל בכך שהילה שינתה את אופי המשימות שבחרה לשיעור ואת סוג השאלות ששאלה (מדגש על שאלות סגורות לדגש על שאלות פתוחות), דרשה ביסוס, קידמה מחויבות לקהיליית לומדים ולידע וחשיבה, ועוד. הגידול במספר מהלכי השיח בשיעוריה כמו גם הניתוח האיכותני של השיעור האחרון העידו על הטמעה ויישום לאורך זמן.

אפרת, מורה בעלת ניסיון רב אך ללא הכשרה מתמטית, השתתפה בהשתלמות במידה מועטה מאד שהתבטאה בעיקר בזיהוי ובתיאור פעולות. מאפיין זה חזר גם בראיונות, בהם התייחסה במידה מועטה לטעויות ולקשיים, העלתה מעט תובנות, הדגישה בעיקר היבטים דיאלוגים גנריים של השיח המחויב, והציגה תפיסה של הוראה כהקניית ידע שנותרה עקבית וללא שינוי. כמו כן הפערים בין פרשנותה את הפרקטיקות שיישמה בשיעוריה לפרשנות החוקרת, נותרו גדולים גם בסוף התהליך. לא נמצא שיפור ברמת הדרישה הקוגניטיבית וברמת השיח בהשוואה בין השיעור הראשון לאחרון (הציון הממוצע של כלל רכיבי ה IQA בשיעור הראשון היה 2.2 ובשיעור האחרון 2.1), וסוג השאלות ששאלה בשיעור לא השתנה והתאפיין בשאלות סגורות. לעומת זאת, אופי המשימות שבחרה השתנה למשימות שכללו יותר הסברים ונימוקים, היא צמצמה את מספר הפעמים בהן השתמשה במשוב מעריך, ותשובות התלמידים הפכו מבוססות יותר. השוואת השיעורים מבחינת מספר מהלכי השיח וכן הניתוח האיכותני לא העידו על הטמעה של מרכיבים רבים בשיח המחויב, אך לימדו כי היא אימצה מספר פרקטיקות ככלים גנריים, אשר צירפה לסל הכלים הפדגוגיים שברשותה ושימרה את יישומן לאורך זמן. כלים אלה לא סייעו לה בשיפור רמת הדרישה הקוגניטיבית בשיעורים, ולא נמצא שהיא עשתה בהם שימוש דיסציפלינרי באופן שיוביל להבניית ידע של התלמידים. ייתכן כי ההסבר לכך נעוץ ברקע שלה, שלא כלל העמקה בדיסציפלינה של המתמטיקה. גורם מעכב נוסף לקידום שיח מחויב ובעיקר לקידום מחויבות לקהיליית לומדים בכיתתה של אפרת, הוא האקלים הלימודי ששרר בכיתה שלא אופיין כאקלים מכבד. הקיימות בשימוש בפרקטיקות, שיושמו באופן גנרי בלבד, מלמדת כי רכישת כלים ויישומם לאורך זמן אינם יכולים להבטיח יישום איכותי בשיעורי מתמטיקה, אך באופן כללי עשויים לשפר את ההוראה.

חקרי המקרה, כפי שהודגמו כאן, מלמדים כי מאפיינים של פיתוח מקצועי אפקטיבי (Borko et al., 2008) ושימוש במהלכי שיח מחויב מהווים תנאים הכרחיים אך לא מספיקים לשינוי הרצוי מבחינת ההשתלמות, שמטרתה שיפור ברמת הדרישה הקוגניטיבית וברמת השיח המחויב בשיעור. במחקר נמצא כי למידה ויישום איכותיים בין מערכות מתאפיינים בשבעה היבטים: (א) רמה גבוהה של חקרנות ורפלקציה; (ב) התייחסות להיבטים מתמטיים של השיח כמשולבים בתחום הדעת ולא רק ככלים גנריים; (ג) תפיסת ההוראה כהבניית ידע (ולא כהקניית ידע) ומתוך כך שימוש בפרקטיקות השיח המחויב ככלים למימושה; (ד) שינוי אופי המטלות בשיעור; (ה) שימוש בשאלות המקדמות אינטראקציה טיעונית דיאלקטית בין לומדים ולמידה מתוך הבנה; (ו) משוב מקדם למידה ולא משוב מעריך; (ז) פרשנות של הפרקטיקות שנמצאת בהלימה עם הפרשנות שנדונה בהשתלמות.

חשיבות המחקר היא בהתבוננות הרחבה על תהליכי למידה של מורים ויישום של שיח מחויב בין מערכות לאורך זמן. שיח כזה דורש שינויים עמוקים בפרקטיקות של מורים והוא מורכב, שכן המורים נדרשים ללמד באופן שלרוב לא חוו כתלמידים. הממצא שהרקע המתמטי של המורה עשוי להוות

גורם ביישום אפקטיבי של פרקטיקות השיח המחויב, מחזק ממצאי מחקר קודמים (למשל Michaels & O'Connor, 2012) וגם בכך המחקר תורם לגוף הידע המצטבר בנושא.

רשימת מקורות

משרד החינוך (2006). תכנית הלימודים במתמטיקה לכתות א-ו בכל המגזרים. תל- אביב: מעלות.

Baxter, P., & Jack, S. (2008). Qualitative case study methodology: Study design and implementation for novice researchers. *The qualitative report*, 13(4), 544-559.

Borko, H., Jacobs, J., Eiteljorg, E., & Pittman, M. E. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 417-436.

Boston, M. (2012). Assessing instructional quality in mathematics. *The Elementary School Journal*, 113(1), 76-104.

Chapin, S. H., O'Connor C., & Anderson, N. C. (2009). *Classroom Discussion: Using Math Talk to Help Student Learn, Grades K-6 (2nd ed.)*. Sausalito, CA: Math Solutions.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (2017). *Discovery of Grounded Theory: Strategies for Qualitative Research*. Routledge.

Fitzmaurice, G. M., Laird, N. M., & Ware, J. H. (2012). *Applied Longitudinal Analysis* (Vol. 998). John Wiley & Sons.

Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Changing teaching practices towards explorative mathematics instruction –The interweaving of teacher identity and pedagogical discourse. *Teaching and Teacher Education*, 86, 102862

Michaels, S., & O’Connor, C. (2012). *Talk science primer*. Cambridge, MA: TERC.

Michaels, S., O’Connor, C., & Resnick, L. B. (2008). Deliberative discourse idealized and realized: Accountable talk in the classroom and in civic life. *Studies in Philosophy and Education*, 27(4), 283-297.

הזדמנויות ללמידה של מורים למתמטיקה הנוצרות משימוש ב"שיטת המפתחות" בביה"ס היסודי

סיגלית רחום[1], **<u>רוית שתיוי</u>**[1], **יניב ביטון**[1,2]

[1] מטח – המרכז לטכנולוגיה חינוכית; [2] שאנן – המכללה האקדמית הדתית לחינוך

רקע תיאורטי

הפדגוגיה החדשנית שמה דגש על מעבר מהוראה להבניית ידע, משנה את מוקדי הכוח של המורה והתלמיד, של הפעילות הלימודית ושל תפקיד הטכנולוגיה ומהווה בסיס לשינויים בתהליכי ההוראה והלמידה (Dadzie, Müller, Alissandrakis, & Milrad, 2016). בשל השינויים הללו נוצר צורך להנהיג מודלים חדשים ללמידה הן של התלמידים והן של המורים.

לצורך קיום השינוי הפדגוגי המורים נזקקים לפיתוח מקצועי. פיתוח מקצועי של מורים עשוי לקדם את הידע הפדגוגי־טכנולוגי הדרוש לתמיכה בתהליכי למידה משמעותיים, בהם יועצמו תהליכי החשיבה ותגבר העמקת הידע וההבנה של תוכני הלימוד, וכך יתחזק הקשר בין הלומדים למורים; כמו כן תאפשר ההכשרה שימוש בכלים טכנולוגיים נרחבים לשיפור ההוראה ולשילוב רב־תחומי (Anderson, 2016).

הפיתוח המקצועי של עובדי הוראה הוא הבסיס להשבחת כוחות ההוראה ולביסוס הפרופסיה של ההוראה. המתווה לפיתוח מקצועי מסדיר את העקרונות להבניה של תוכניות פיתוח מקצועי איכותיות לעובד ההוראה, ומאפשר למערכת החינוך ליצור רצף של תכנון וביצוע של תהליכי פיתוח מקצועי בכל שלבי ההתפתחות של עובדי ההוראה במהלך הקריירה המקצועית (דוח משרד החינוך, 2012).

תהליכי הפיתוח המקצועי עשויים לשמש גשר בין המקום שאנשי החינוך פעילים בו למקום שהם יהיו בו בעתיד הקרוב או הרחוק, על אתגריו ותביעותיו.

שיטת ההוראה הדיפרנציאלית היא דרך חדשה לקבלת שונותם של הילדים, והיא מכשירה את המורה להכיר, לאבחן ולזהות את הקשיים של התלמידים. בשיטה זו המורה אחראי להוביל את התלמידים מאותו מקום שבו הם נמצאים, אל המטרות שתוכנית הלימודים קבעה להם (למדן, 1994).

בפתרון בעיות מתמטיות, בהתאם למורכבות הבעיה, התלמידים בשלב זה או אחר עשויים להיתקל במחסומים. אנו כמורים מחפשים את הדרכים לעזור להם ולתת בידיהם כלים שיסייעו להם להתמודד באופן עצמאי עם פתרון בעיות (Herold-Blasius, 2017). חשוב שהתלמידים לא רק יקבלו את הידע אלא ידעו גם להשתמש בו (Peter, E. E, 2012).

שיטת המפתחות

צרור כרטיסים בצורת מפתחות השונים בצורתם זה מזה. כל מפתח מציג אסטרטגיה שונה לפתרון בעיות. האסטרטגיה מופיעה על המפתח בשני אופנים: איור ומילים. שיום האסטרטגיה צריך להיות בשפה פשוטה, קצרה וברורה לקידוד טוב יותר של מידע ולצורך שיפור יכולת השליפה שלו. (2017 ,Herold-Blasius)

מתודולוגיה

שאלת המחקר היא: מהן ההזדמנויות ללמידה דיפרנציאלית שהמורים מזהים משימוש ב"שיטת המפתחות" בכיתותיהם?

הקורס לפיתוח מקצועי של מורים "הוראה דיפרנציאלית במתמטיקה" בא לתת מענה להכשרת המורים לשיטות הוראה דיפרנציאליות תוך קידום הידע הפדגוגי והטכנולוגי הנדרש. הקורס בנוי מ-8 יחידות למידה הנותנות למורים הזדמנות להבין מהי הוראה דיפרנציאלית וכיצד היא באה לידי ביטוי במתמטיקה, בתהליכי הלמידה וההוראה: פתיח השיעור, מעבר לעבודה עצמית, זמן התרגול, סיכום השיעור והערכה. הקורס נותן מענה גם להשפעה של עיצוב סביבת הלמידה על תהליכים אלה. אופן הלמידה בקורס נותן אפשרות למורים להיחשף להתנסותם וניסיונם של המורים האחרים וכך להתנסות גם בלמידת עמיתים.

אחד העקרונות העומדים בבסיסו של פיתוח הקורס הוא החיבור בין התאוריה לפרקטיקה, כך שהמורים לומדים ומתנסים בעצמם ובנוסף מתנסים עם התלמידים בכיתתם; זאת במטרה להשיג הכשרה משמעותית שתגרום למורים להשתחרר משיטות ההוראה המסורתיות ולהתנסות בשיטות הוראה חדשניות ומותאמות יותר לצורכי הלומדים.

הקורס נפתח לראשונה בשנה"ל תש"ף בשתי פעימות ובהשתתפות של כ־500 מורים בסך הכול. השנה הקורס ממשיך ורשומים בו כ־400 מורים. הקורס בנוי מ־8 יחידות הוראה, 2 מתוכן סינכרוניות והשאר אסינכרוניות. בכל אחת מהיחידות המורים לומדים תאוריות ופרקטיקות שמטרתן לתת מענה לתהליכי הוראה ולמידה שונים באופן דיפרנציאלי.

כלי המחקר וניתוח הנתונים

המחקר הנוכחי עוסק במשימה שניתנה למורים במפגש השלישי בהשתלמות, ובה הם נדרשו לפתור בעצמם בעיה מתמטית ולבחון את האסטרטגיות שבהן השתמשו לפתרונה. לאחר הפתרון הם נחשפים לאסטרטגיות שבהן השתמשו תלמידים לפתרון אותה הבעיה. לאחר ההתנסות מוצגת בפניהם "שיטת המפתחות" (Herold-Blasius, 2017) ובה משתמשים בציור של מפתח להצגת אסטרטגיות. כל מפתח הוא בעל צורה שונה ומייצג בעזרת איור ומילים בודדות אסטרטגיה שהתנסו בה התלמידים ועומדת לרשותם. התלמידים מקבלים צרור מפתחות המשמש אותם לפתרון בעיות מתמטיות, כך שעם הזמן יוכלו להשתמש במפתחות ללא תיווך המורה ויהיו לומדים עצמאיים.

במחקר נדרשו המורים להתנסות עם התלמידים בשיטה זו ולדווח עליה בסביבת הקורס.

כלי המחקר בו נאספו הנתונים הינו "בסיס נתונים" במערכת המודל וכלל התייחסות לשכבת הגיל ונושא השיעור, לתיעוד חוויית התלמידים במהלך ההתנסות, לתובנות לשימור ולתובנות לשיפור.

בשלב הראשון נאספו תשובות המורים מתוך בסיס הנתונים ומופו לפי שכבת הגיל שבה המורים מלמדים. בשלב השני נותחו תשובותיהם של המורים על ההתנסות בכיתה במטרה לזהות קטגוריות ראשוניות לאפיון התרומה של שילוב מפתחות האסטרטגיות. בשלב השלישי נותחו הרפלקציות של המורים במטרה לזקק את הקטגוריות שעלו מהשלב השני, ובהתאם להן גובשו קטגוריות מתאימות.

ממצאים וסוגיות לדיון

בשיטת המפתחות ביחידה המתוארת התנסו 391 מורים. במחקר הנוכחי נותחו 157 מורים שהשתתפו באחד מהקורסים בתש"ף. 37% מתוכם ציינו במשוב הקורס את שיטת המפתחות כדוגמה לפרקטיקת הוראה שהייתה חדשה להם והם יישמו אותה במהלך השנה בהוראה שלהם. 24% מהמורים דיווחו כי התלמידים המשתמשים במפתחות מצליחים לעבוד באופן עצמאי ולווסת לעצמם את הלמידה. בשל כך המורים יכולים להתפנות ולסייע לתלמידים חלשים. 19% מהמורים דיווחו כי צרור המפתחות הגביר את תחושת המסוגלות והביטחון העצמי של התלמידים ובכך תרם להנעה ולשיפור חוויית הלמידה. הזדמנויות נוספות שעליהן דיווחו מורים היו: פיתוח השפה המתמטית, למידת עמיתים, פתרון מתוך הבנה משמעותית והתמודדות עם שאלות ברמות חשיבה גבוהות. מתיאור חוויות התלמידים מן ההתנסות, עלה כי התלמידים הפעילו שיקול דעת בבחירת האסטרטגיה המתאימה ואף עבדו באופן מאורגן. חלק מהתלמידים קיימו שיח עם חבריהם לכיתה שתרם רבות לפיתוח השפה והחשיבה המתמטית.

מורים כתבו: "מצאתי את השיטה כיעילה וכמסייעת לתלמידים בניהול תהליכי עבודה מיטיבים", "שיטה שימושית ונכונה עבור התלמידים, הם חשים ביטחון ועצמאות בבחירת הדרך הנכונה עבורם", "האסטרטגיות הופכות את הלמידה לפחות תלויה במורה והאחריות למילוי משימות תעבור אליהם", "המפתחות האישיים שיפרו את המוטיבציה של הילדים וכתוצאה מכך גם את ההישגים", "תלמידים הצליחו בעזרת המפתחות לעבוד באופן עצמאי יותר והרגישו כמו 'בעלי הפתרונות'. זה יצר להם תחושת מסוגלות".

סוגיות לדיון:

- שיטות הוראה ולמידה חדשניות להגברת המוטיבציה והשבחת ההוראה של מורים למתמטיקה.
- התנסות המורה כתלמיד כחלק חיוני בדרך למורה מומחה.
- אתגרים בשימוש בכלי ללמידה דיפרנציאלית.

רשימת מקורות

למדן, א' (1996). הוראה־למידה דיפרנציאלית, לקידום הכיתה ההטרוגנית, כתב עת לעיון ומחקר 1, 49-52.

משרד החינוך (2012). התוכנית הלאומית להתאמת מערכת החינוך למאה ה־21 – חזון ורציונל.

Anderson, T. (2016). Theories for learning with emerging technologies. Emerging technologies in distance education.

Dadzie, A. S., Müller, M., Alissandrakis, A., & Milrad, M. (2016). Collaborative Learning through Creative Video Composition on Distributed User Interfaces. In State-of-the-Art and Future Directions of Smart Learning (pp. 199-210). Springer, Singapore.

Herold-Blasius, R. (2017). Strategy Keys as Tools for Problem Solving, Mathematics Teaching in the Middle School, 23 (3), 146-153

Peter, E. E. (2012). Critical thinking: Essence for teaching mathematics and mathematics problem solving skills. African Journal of Mathematics and Computer Science Research, 5(3), 39-43.

למה בחרתי להיות מורה למתמטיקה?

יוחאי דוד איובי, בת שבע אילני

מכללת חמדת הדרום

מבוא

הוראה וחינוך הם תפקידים חיוניים בחברה של ימינו. אבל, למרות החשיבות הרבה של מקצוע ההוראה בקידום דור העתיד, מקצוע ההוראה אינו מהווה מוקד משיכה לכוח אדם איכותי וטוב, ואינו מצליח לעמוד בתחרות מול מקצועות טכנולוגיים ועתירי ידע. עובדה זו נכונה במיוחד באשר למשיכת כח אדם איכותי להוראת מתמטיקה משום הדרישות הגבוהות המצופות ממי שמכשיר עצמו להוראת מקצוע זה.

אחת ההחלטות המרכזיות שעושה הפרט במהלך חייו היא בחירת מקצוע (אלטרץ וטל, 2015). להחלטה זו יש השפעה במישורים שונים על התפקוד הכלכלי, החברתי והפסיכולוגי של הפרט (Sayime Erben, 2019). בחירת המקצוע משפיעה אף על מעמד הפרט בחברה, על השתייכותו המקצועית, על זהותו האישית ועל המימוש העצמי שלו. בחירת תחום עיסוק מהווה מקור דאגה מרכזי לא רק לבוגרים אלא אף לצעירים בגילאי סיום ביה"ס (Aydin & Kenan, 2014).

מטרת המחקר הייתה לברר מהן הסיבות שגורמות למורים למתמטיקה לבחור במקצוע זה. יש להניח שכאשר תיוודענה הסיבות, הן תוכלנה לעזור בגיוס פרחי הוראה על ידי שיווק ופרסום תוכניות להכשרת מורים למתמטיקה בצורה שתשתמש בסיבות שעלו במחקר ובכך לנסות להתגבר על הקושי בהבאת מורים איכותיים למקצוע.

מניעים בבחירת הוראת מתמטיקה

ניתן לחלק את הגורמים המניעים לבחירת מקצוע ההוראה למספר קטגוריות: מניעים אינטרניים, מניעים אקסטרניים, מניעים אלטרואיסטים והזדהות עם "אחרים".

למקצוע המתמטיקה מעמד מיוחד וגבוה (Mehmet, 2020). יש בציבור הסכמה רחבה באשר לחשיבות המקצוע ולמעמדו הגבוה, בניגוד למיצוב החברתי הנמוך של מקצוע ההוראה. חשיבות מקצוע המתמטיקה מתבטאת אף בחשיבות הרבה שלה זוכה מקצוע המתמטיקה במערכת החינוך. בשל ייחודיות הוראת המתמטיקה בהשוואה להוראת שאר המקצועות, קיימות סיבות נוספות, ייחודיות, לבחירה בהוראת מתמטיקה, בנוסף לסיבות הרגילות המניעות לבחירה במקצוע ההוראה.

בשל הקושי שתלמידים חווים בלמידת המתמטיקה והתסכול הנלווה אליו, ישנם מורים למתמטיקה שמציינים את הרצון לסייע לתלמידים להצליח ולחזק את ביטחונם האישי כמניע לבחירה בהוראת המתמטיקה. הזדהות עם מורה שגרם לתחושת הצלחה אצל התלמיד, ובמיוחד אם מדובר בתלמיד שנכשל במקצוע לפני ההכרות עם המורה, מהווה סיבה לבחירה במקצוע הוראת המתמטיקה מתוך הזדהות עם המורה שגרם להצלחה.

ניתן לציין כסיבה לבחירה בהוראת המתמטיקה את אהבת המקצוע, העניין בו והאתגר הרב בהוראתו. דבר זה נכון במיוחד באשר למורים למתמטיקה בכיתות התיכון ובהקבצות הגבוהות (ארנון, פרנקל, ורובין, 2012).

יורוקובסקי ולבנברג (2020), חקרו את המניעים לבחירת מקצוע ההוראה של סטודנטים להוראת המתמטיקה.במחקרן נמצא כי הסיבות המרכזיות הן חווית לימודים חיובית של דיסציפלינת ההתמחות בתיכון וההתאמה האישית שהמועמדים מייחסים לעצמם.

שיטה

מטרת המחקר הייתה לברר מהן הסיבות שמורים למתמטיקה בחרו בעיסוק זה.

מתוך מטרת המחקר עולות שאלות המחקר:

1. מהן הסיבות שעליהן מדווחים מורים למתמטיקה שהביאו אותם לבחור בעיסוק זה?

2. האם ימצאו הבדלים בין מורים בבתי ספר יסודיים לבין מורים בבתי ספר על יסודיים בדיווחיהם באשר לסיבות שהביאו אותם לעסוק בהוראת מתמטיקה? ואם כן, מהם?

3. האם ימצאו הבדלים בין מורים לבין מורות בדיווחיהם באשר לסיבות שהביאו אותם לעסוק בהוראת מתמטיקה? ואם כן, מהם?

4. האם ימצאו הבדלים בין מורים עם וותק של עד 5 שנים לבין מורים עם וותק של מעל 5 שנים בדיווחיהם באשר לסיבות שהביאו אותם לעסוק בהוראת מתמטיקה? ואם כן, מהם?

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה מורים (גברים ונשים) למתמטיקה ממגזרים שונים. המחקר נערך על מדגם של 60 מורים למתמטיקה בבית הספר היסודי והעל יסודי. בחלק הכמותי נבדקו עמדות של 26 מורים מביה"ס היסודי ושל 34 מורים מביה"ס העל יסודי. בחלק האיכותני רואיינו 12 מורים (שנכללו גם בחלק הכמותי).

בחלק הכמותי הנבדקים ענו על שאלון עם היגדים שנאספו מן הספרות והותאמו לבחירה במקצוע הוראת המתמטיקה. הנחקרים התבקשו לדרג את מידת התאמת כל היגד לגביהם. השאלון כלל היגדים כדוגמת: "בתיכון הצטיינתי בלימודי מתמטיקה", "אני חש ביקורת על הדרך בה מלמדים מתמטיקה בבתי הספר", "אני מעוניין לתרום לדור העתיד של המדינה". דירוג ההיגדים נעשה על פי סולם ליקרט.

ממצאים ודיון

הסיבה שדורגה במקום הראשון אצל אוכלוסיית כלל המורים היא בחירה במקצוע משום שהמתמטיקה היא מקצוע מאתגר ודורש נטייה ריאלית והצלחה בלימודי מתמטיקה בבית הספר (M=4.37,SD=0.74). זהו ממצא חדש כיוון שהמחקרים הקודמים לא התמקדו במורים למתמטיקה ואהבת הדיסציפלינה לא הוזכרה כגורם מרכזי בבחירת המקצוע.

סיבות נוספות לפי הסדר שהתקבלו: רצון להעניק ידע לתלמידים (M=4.27, SD=0.95), רצון להשפיע על הדור הבא (M=4.22, SD=1.09) ורצון להיות דמות חינוכית (M=4.18, SD=1.03). ממצא זה תואם

מחקרים קודמים בתחום שמצאו כי מניעים אלטרואיסטיים מהווים סיבה עיקרית לבחירה במקצוע ההוראה (גילת, קציר, ושגיא, 2004). מניע מרכזי נוסף הוא רצון לעסוק במקצוע מעניין ורבגוני. מניע זה הוא מניע אינטרני מובהק, ודווח שמניעים אינטרניים הנובעים מאופי עבודת ההוראה, מהווים מניעים מרכזים לבחירה בהוראה (ארנון, פרנקל, ורובין, 2012). כמו כן זכו לציון גבוהה ההיגדים המתארים את הבחירה בשל תחושת ייעוד ושליחות , רצון לעסוק במקצוע המתאים לאורך חיים דתי ועיסוק בהוראה לאחר אכזבה מעיסוק קודם.

בפילוח על פי מגדר, ותק וסוג בית הספר (יסודי מול תיכון):

1. נמצא הבדל מובהק בין מורים ותיקים לבין מורים חדשים. מורים ותיקים דיווחו על רמות גבוהות יותר של רצון להעניק תחושת ביטחון לתלמידים, של בחירה בהוראה בשל אהבת המקצוע ושל בחירה בהוראה מתוך רצון להשפיע על התפתחות אישיות התלמיד מאשר מורים המחזיקים בוותק של פחות מ-5 שנים. ניתן להסביר תוצאות אלו בכך שאוכלוסיית המורים הוותיקים מתאפיינים בכך שהם ראו את המערכת מבפנים על שלל חסרונותיה ויתרונותיה, ובכל זאת החליטו להישאר במערכת החינוך, כנראה בשל מניע פנימי.

2 .נשים דיווחו באופן מובהק יותר מגברים, שבחרו במקצוע ההוראה בשל רצון להקנות לתלמידים אסטרטגיות למידה (נשים-M=4.12, SD=0.95, גברים- M=3.00, SD=1.41, P=0.001)„ מתוך רצון להיות דמות חינוכית (נשים-M=4.39, SD=0.80, גברים- M=3.74, SD=1.33, P=0.06) ומתוך תחושת ייעוד ושליחות (נשים-M=4.22, SD=0.99, גברים- M=3.53, SD=1.17, P=0.03). ניתן להסביר תוצאות אלו בכך שידוע כי בחברות רבות ישנן תכונות המובחנות באופן סטראוטיפי כשייכות לנשיות או לגבריות. על פי הסטריאוטיפ מצופה מגבר טיפוסי לעמוד בציפיות ולהפגין אוריינטציה גברית מובחנת, כלומר מצפים ממנו לנהוג באגרסיביות, לגלות שאפתנות, הישגיות, תחרותיות (קונל, 2009), שתלטנות ודומיננטיות אך מאשה מצופה להתנהג בהתאם לסטראוטיפ הנשי ולכן מצפים ממנה להתנהג בעדינות, ברכות וחמלה, לוותר לסובבים אותה ולהעניק להם שירותים שונים ולעסוק ביחסים בין הפרט לבין האחרים הסובבים אותו (אופלטקה, 2013).

3. נמצא הבדל מובהק באשר לרמת ההשפעה של רמת התואר בהוראה שנתפסת כקלה על ידי מורים בבית ספר יסודי לעומת מורים בבית ספר על יסודי (מורים בבי"ס יסודי M=2.46, SD=1.21, מורים בבי"ס על־יסודי M=1.62, SD=1.04, P=0.01). ניתן להסביר הבדל זה בכך שהתואר בהוראת מתמטיקה לבית הספר העל־יסודי הוא קשה באופן משמעותי יותר מאשר התואר בהוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי ונחשב קשה גם יחסית לתארים אחרים. אצל המורים בבית ספר יסודי, התואר נתפס כתואר לא קשה והתלמידים מכבדים את מקצוע המתמטיקה ולכן קל ללמד אותו. עם זאת. מורים בבתי ספר על יסודיים דיווחו בהבדל מובהק על בחירה בהוראה בשל מבנה שבוע עבודה המתאים לגידול ילדים (מורים בבי"ס יסודי M=2.88, SD=1.34, מורים בבי"ס על־יסודי M=3.74, SD=1.36, P=0.02).

רשימת מקורות

אופלטקה, י'. (2013). האופן שבו תופסים מורים מוסלמים ויהודים את גבריותו של מנהל בית הספר: היבטים תרבותיים וחברתיים של הקשר בין מנהל למורה. *עיונים בחינוך* , 140-160.

אלטרץ, ח', טל, ז'. (2015). עוגני קריירה אישיים ובחירת תכנית לימודים לתואר שני בחינוך. דפים 63, 11-43.

ארנון, ר', פרנקל, פ', רובין, ע'. (2012). להיות או לא להיות מורה? הדימוי של מקצוע ההוראה כעיסוק מושך. שבילי מחקר, 33-44.

יורוקובסקי, י', לבנברג, א'. (2020). הבחירה בחוגים מדעים ומתמטיקה במסלול דו חוגי במכללה להוראה – המאפיינים והמניעים. גוונים.

קונל, ר'. (2009). גבריות. חיפה.

Aydin, B., & Kenan, Ö. (2014). Choosing Teaching Profession as a Career: Students' Reasons. *International Education Studies; Vol. 7, No. 5*, 104-115.

Mehmet, S. (2020). Parent-Child Mathematics Affect as Predictors of Children's Mathematics Achievement. *International Online Journal of Primary Education.*

Sayime Erben, K. (2019). Reasons for Choosing the Profession of Teacher. *Asian Journal of Education and Training*.

רפלקציה על הוראת המתמטיקה – מ"עימות" להזדמנות ללמידה

יעל נוריק, אברהם הרכבי, רוני קרסנטי

מכון ויצמן למדע

רקע ושאלת מחקר

הספרות המחקרית מדגישה את התרומה של השתתפות בתהליכי רפלקציה להתפתחותם המקצועית של מורים בכלל ומורים למתמטיקה בפרט. לרפלקציה הגדרות רבות, מתוכן בחרתי להתייחס להגדרה הבאה:"*התבוננות זהירה, מפורטת ואנליטית ודיון מפורש ב*'מה שנעשה', *במטרה להבין ולבחון מחדש כוונות, מטרות, החלטות ואת יישומיהן של אלו" (*Karsenty & Arcavi, 2017, תרגום מעמ' 435).

מחקרים שונים מצביעים על כך שביצוע רפלקציה מאפשר למורים להיות מודעים יותר לפעולות שלהם, למטרות ולאמונות שעומדות בבסיסן ולתהליך קבלת ההחלטות שלהם, ומכאן גם להזדמנות לביצוע שינויים בפרקטיקה (Finlay, 2008; Karsenty & Arcavi, 2017; McAlpine & Weston, 2002). בנוסף, מק'אלפין ווסטון (McAlpine & Weston, 2002) ציינו את חשיבותו של תהליך הרפלקציה כחלק ממנגנון של למידה והעמקה של ידע מתמטי להוראה.

תהליך הרפלקציה הוא מורכב ומורים מתקשים לבצעו בפועל. התהליך דורש ניתוח מעמיק שמתייחס להיבטים שונים וכולל התמודדות של המורה עם רגשות שונים וביקורת (רן, 2016; ;Finlay, 2008 Korthagen, 2014). זאת ועוד, מורים אינם רואים תמיד את החשיבות בביצוע תהליך רפלקציה ובהתבוננות על הפרקטיקה של עצמם (Bruckheimer & Hershkowitz,1983; Finlay, 2008)). כתוצאה מסיבות אלו, מורים מבצעים לעתים קרובות את תהליך הרפלקציה באופן טכני וריטואלי שאינו תורם להתפתחותם המקצועית (Finlay, 2008 ; רן, 2016).

ביצוע רפלקציה אינו דבר מובן מאליו, אך הוא ניתן ללמידה, תחת הכוונה והדרכה (Finlay, 2008). לשם כך, יש מקום לבחון את האופן בו מורים מבצעים רפלקציה ולעמוד על גורמים שיכולים לסייע להם בכך, לצד גורמים שמקשים עליהם, באופן כללי ובפרט בהקשר של תחום החינוך המתמטי. כמו כן, יש לתת את הדעת על הקשרים שונים בהם הרפלקציה מתאפשרת. זוהי נקודת המוצא של מחקר זה.

במחקר, אופיינו רפלקציות שמורים למתמטיקה ביצעו במרחבים בעלי מאפיינים שונים: מפגשי השתלמות, יומנים שבועיים וראיון מבוסס-וידאו שבמסגרתו המורים צפו בשיעור של עצמם. אפיון ההתבטאויות של המורים במרחבים אלו אִפשר להצביע על הזדמנויות שיש למורים לבצע רפלקציה, על גורמים שמשפיעים על השתתפותם בתהליך ועל איכותו. במאמר זה אתמקד בהיבט אחד שעלה מהמחקר, והוא מידת המוכנוּת (readiness) של המורים לבצע רפלקציה: לשתף על אודות ההוראה שלהם, לחשוב עליה ולנתח אותה, ולייחס חשיבות לעצם ביצוע הרפלקציה. בהתאם לכך, שאלת המחקר המוצגת כאן היא: *באיזו מידה מורים למתמטיקה מוכנים להשתתף בתהליך רפלקציה ומייחסים לו חשיבות, כאשר ניתנת להם אפשרות להתבטא על הוראת המתמטיקה במרחבים שונים?*

מתודולוגיה

המחקר בנוי מאוסף חקרי מקרה של מורים שהשתתפו בהשתלמויות שונות של פרויקט עדש"ה (**ע**מיתים **ד**נים ב**ש**יעורי **ה**מתמטיקה; פרויקט המופעל מאז 2012 מטעם מכון ויצמן למדע). במאמר זה אתמקד בשלושה מורים מבין 11 המורים שהשתתפו במחקר, שלושתם מלמדים בתיכון בכיתות ברמות 3 ו־4 יחידות לימוד: נועה, מורה בעלת ותק של 3 שנים, לביא, מורה בעל ותק של 11 שנים ומירב, מורה בעלת ותק של 12 שנים (שמות בדויים).

נתוני המחקר נאספו משלושה מקורות, אותם אכנה "מרחבים להתפתחות מקצועית". למרחבים אלו מאפיינים שונים, אך שלושתם זימנו למורים אפשרות להתבטא על ההוראה, שלהם או של אחרים, באופן רפלקטיבי.

<u>מפגשי השתלמות של פרויקט עדש"ה:</u> הנתונים למחקר נאספו מהשתלמויות עדש"ה שהתקיימו ברחבי הארץ בשנה"ל תשע"ו. בהשתלמויות אלו, מורים צופים בשיעורי מתמטיקה מוסרטים ודנים בהם באמצעות מסגרת ניתוח ייחודית בת שש עדשות, המתייחסת להיבטים שונים של הוראת מתמטיקה (Karsenty & Arcavi, 2017). מפגשי ההשתלמויות צולמו וקטעים נבחרים מהם תומללו.

<u>יומני רפלקציה שבועיים:</u> בשנה שלאחר ההשתתפות בהשתלמויות, כתבו משתתפי המחקר יומנים אישיים על ההוראה בכיתותיהם, במשך חמישה חודשים. מדי שבוע, המורים התבקשו לכתוב על מאורע שהיה משמעותי עבורם בשבוע החולף בעת תכנון ההוראה או בהוראה בכיתה.

<u>ראיון מבוסס-וידאו על בסיס שיעור מצולם:</u> בכיתה של כל אחד מהמורים צולם שיעור (נושא השיעור והכיתה בה צולם נקבעו על יד י המורה). על בסיס הצילום התקיים ראיון אישי בו המחברת הראשונה צפתה יחד עם המורה בשיעור. המורים התבקשו לעצור את הווידאו ב"נקודות עניין" – רגעים בשיעור עליהם היו רוצים לשוחח. הראיונות צולמו ותומללו במלואם.

ניתוח הנתונים כלל כמה שלבים, במהלכם אופיינו דפוסי ההתבטאויות של המורים בכל מרחב וזוהו הזדמנויות לרפלקציה שהמרחבים מזמנים. ניתוח חקרי המקרה הצביע על סוגיות שונות, ביניהן הסוגיה אליה מתייחסת שאלת המחקר שהוצגה לעיל, הנוגעת למידת המוכנות של המורים לביצוע רפלקציה והחשיבות שהם מקנים לתהליך זה. נביא כאן ממצאים לגבי סוגיה זו.

ממצאים

ניתוח הנתונים לפי הסוגיה של מוכנות המורים לבצע רפלקציה מצביע על קיומו של רצף, שבקצהו האחד נמצאת "מוכנות גבוהה לביצוע רפלקציה", בקצהו האחר "מוכנות נמוכה לביצוע רפלקציה" ובתווך נמצא השלב שאנו מכנים "בתהליך למידה והפנמה". להלן יוצגו דוגמאות מתוך ניתוח חקרי המקרה אשר פורסות את הרצף.

מוכנות גבוהה לביצוע רפלקציה – המקרה של נועה

"מוכנות גבוהה לביצוע רפלקציה" מתייחסת למורים שמכירים בחשיבות ביצוע הרפלקציה ומעורבים בתהליך תוך חקירה של ההוראה. דוגמה לכך היא נועה, אשר בכל המרחבים שיתפה בהוראה שלה ובחנה אותה בפתיחות ובכנות, גם כשלא היתה שבעת רצון ממנה. נועה התייחסה לאירועים שחלקם היו "לא מוצלחים", התבטאה אודות קשיים שונים שחוותה, ואף הביעה רגשות שסיטואציות שונות עוררו בה. לדוגמה, באחד השבועות רשמה ביומן: *"יצאתי די מתוסכלת מהשיעור, אני מבינה שיש*

לתלמידים קושי מאוד גדול בהתמודדות עם בעיות מילוליות, אך נראה שלא מספיק הנחתי אותם לעקרונות מנחים. לצערי, גם אצלי לא מאוד ברור מה הם העקרונות וכיצד כדאי ללמד נושא זה" (מתוך יומן 13).

המוכנות של נועה לביצוע הרפלקציה בלטה עוד יותר במפגשי ההשתלמות, בהם נועה סיפרה על ההוראה של עצמה מיוזמתה, כולל העלאת קשיים וחששות. נביא דוגמה להתבטאות של נועה הלקוחה ממפגש שהתקיים סביב שיעור מצולם בכיתה י' ברמת 3 יחידות, בו המורה מציג לתלמידיו את מושג השיפוע. בדיון במפגש, המורים דיברו על הבחירה של המורה להעמיק בהבנת המושג על חשבון תרגול של הנושא. במהלך הדיון נועה אמרה:

> נועה: אני תמיד יש, תמיד המתח הזה בין שיעור שהוא הבנה... אין פה שום תרגילים מהמאגר. ואז אני מרגישה, מול, נגיד, מורה מקביל אלי במב"ר ואני עוד מתעכבת על זה שעתיים, ואז כשבאים למבחן, אני רואה שתלמידים שלי מצליחים פחות. זה פחד כזה מאוד...

יש לציין כי הפתיחות של נועה להתייחס לדילמות ואתגרים שהיא חווה ולהביע רגשות של חשש ופחד לא היתה נפוצה אצל מורים אחרים .כמו כן, במפגשי ההשתלמות נועה לא היססה לשאול שאלות שעשויות לחשוף שאינה בקיאה במושגים מתמטיים מסוימים. בסך הכל, מההתבטאויות של נועה במרחבים השונים עולה תמונה של מורה שמוכנה לקחת חלק בתהליך רפלקטיבי מתוך הכרה בחשיבותו של תהליך זה ותפיסת הרפלקציה כהזדמנות ללמידה.

מוכנות נמוכה לביצוע רפלקציה – המקרה של לביא

"מוכנות נמוכה לביצוע רפלקציה" מתייחסת לקושי של מורים להבין מהי רפלקציה ולקחת חלק בתהליך רפלקטיבי ולראות תהליך זה כמשמעותי להתפתחותם המקצועית, כפי שיודגם במקרה של לביא. במפגשי ההשתלמות בהם השתתף, זוהו אצל לביא שני דפוסים. בדיונים שהתמקדו ברעיונות מתמטיים או בפתרון בעיות לביא לקח חלק פעיל, שאל שאלות והציע רעיונות. אולם, בדיונים סביב היבטי הוראה אחרים, לביא השתתף פחות בדיונים ונטה להתרחק ממשימות שנועדו לזמן רפלקציה על ההוראה. הדוגמה הבאה לקוחה מתוך דיון סביב השיעור המצולם "מבוא לאנליזה", בו המורה ביקשה מתלמידיה לסרטט פונקציה שיורדת החל מנקודה מסוימת, אבל לא חותכת את ציר ה-x. לביא ציין שהוא חשב שמטרת המורה בפעולה זו היא להציג לתלמידיה את מושג האסימפטוטה האופקית "*בנגיעה, בואי נגיד ככה, לא ממש להתעמק*". בעקבות הערה זו, התפתח דו-שיח בין לביא לבין המנחה:

> מנחה: הפריע לך שזה בנגיעה ולא ממש מתעמק. [לביא מהנהן]. אתה היית מתעמק. נניח שאתה היית בוחר את הפונקציה הזו. מה היתה המטרה שלך ואיך היית מתעמק?
>
> לביא: [צוחק] בשיעור ראשון [בנושא אנליזה]?!
>
> מנחה: מה היית עושה אחרת?
>
> לביא: לא הייתי אולי...
>
> מנחה: אבל אתה רוצה שהיא תתעמק, מה זה להתעמק? באיזה אופן?
>
> לביא: לא יודע, היא בחרה את הפונקציה, לא אני.

בדוגמה זו, המנחה מנסה להביא את לביא לחשוב על ההוראה שלו, אך לביא מתקשה לעשות זאת ואף מתחמק ("היא בחרה את הפונקציה, לא אני"). הקושי לבצע רפלקציה בלט גם במרחבים האחרים, בהם המוקד היה ההוראה של לביא עצמו. ביומניו, הקצרים ביותר מבין היומנים שכתבו משתתפי

המחקר, לביא כתב לרוב בקיצור רב על מאורע, והעריך אותו במושגים של שביעות או אי-שביעות רצון, מבלי לפרט. זאת ועוד, ב־35% מהיומנים לביא שלח מייל ובו ציין רק כי "*השבוע לא היה משהו מיוחד/חשוב/משמעותי* ". בראיון עמו, לביא צפה אמנם בשיעור תוך התעמקות בנקודות מסוימות, אך חשף את הקושי שלו להתבטא לגבי השיעור: "*אני לא כל כך מבין מה אני צריך לעשות, זה מאוד פתוח בשבילי... מה את רוצה שאני אגיד על הסרט?"* . דפוסים אלו מעלים את האפשרות שלביא אינו מבין את מהות הרפלקציה והאופנים בהן ניתן לבצע אותה. מתוך הפער מול השתתפותו הפעילה בדיונים ממוקדי־מתמטיקה ,מתחזקת ההשערה כי לביא אינו תופס את תהליך הרפלקציה כהזדמנות ללמידה אשר יכולה לתרום להתפתחותו המקצועית.

תהליך למידה והפנמה – המקרה של מירב

בתָוֶך בין קצוות אלו נמצאת מירב, שמייצגת מורים שנראה שעדיין לומדים את מהות הרפלקציה ואת אופן ההתבוננות בהוראה. במפגשי ההשתלמות, מירב הייתה קשובה ביותר לדיונים, בחלקם השתתפה בקצרה ובחלקם באריכות. בהתבטאויות שונות של מירב נראה שביקשה להבין את ה"שפה" לביצוע רפלקציה, למשל בקטע זה בו ניסתה לחדד לעצמה את מושג ה"דילמות":

> מירב: אני ראיתי דילמה בתור משהו שקורה [למורה] נגיד באמצע שיעור ואיך היא מתמודדת, ולא משהו שהיא חשבה לפני [השיעור]... ככה אני פירשתי דילמה ואולי בגלל זה היה לי קשה למצוא דילמות. ואז אני אומרת, פה אני לא הרגשתי שהיתה [למורה] איזושהי דילמה. היא נורא זרמה עם הרעיון של ה... כאילו, זה היה נראה שהתפיסה שלה היא כן להראות ריבוי פתרונות והכל.

גם ביומנים וגם בראיון התבטאה מירב ארוכות ובפתיחות רבה, ניתחה סיטואציות ופרסה את המטרות והאמונות שלה. יחד עם זאת, בראיון מירב נטתה להסביר את עצמה ואת פעולותיה בפני המראיינת, לעתים בנימה של הצטדקות. למשל, כשצפתה בהסבר שנתנה לתלמידיה על יישומון בגיאוגברה: " *נגיד זה לא תקין להגיד 'רק הדבר הזה'* [על קטע מתוך היישומון], *הייתי צריכה להגיד 'רק הקטע'. אבל זה לא ממש מפריע לי. כי* [התלמידים] *מבינים, אני מבינה... יכול להיות שמורים ותיקים יותר יראו את זה ויזדעזעו.*" במקרה זה, מירב זיהתה סיטואציה בשיעור, חיברה אותה למטרות ולאמונות שיש לה והציעה פעולה אלטרנטיבית ("*הייתי צריכה להגיד 'רק הקטע'* "), פעולות שהן חלק מתהליך רפלקטיבי. על אף הביקורת שהעלתה ("*יכול להיות שמורים ותיקים יותר יראו את זה ויזדעזעו*"), מירב הגנה על הבחירה שלה והצדיקה אותה ("[התלמידים] *מבינים, אני מבינה*").

מהמקרה של מירב עולה פער: מצד אחד, ניכר הרצון של מירב ללמוד כלים לביצוע רפלקציה, כפי שעולה מהדוגמה ממפגשי ההשתלמות, לצד שיתוף הפעולה והפתיחות שלה בכל המרחבים. מצד שני, נראה שעדיין קיים אצלה קושי לחקור לעומק את ההוראה של עצמה, כפי שעולה מניתוח הראיון. אמנם נראה כי מירב מבינה את חשיבות הרפלקציה ונכונה לקחת חלק בתהליך כזה, אך היא עדיין לומדת את התהליך על כל משמעותו ומורכבותו.

דיון ומסקנות

קיימות מידות שונות של מוכנות מורים לקחת חלק בתהליך הרפלקציה ולייחס חשיבות לתהליך זה ולתרומתו לעבודתם. עבור מורים מסוימים, ההתבוננות בעצמם ובמורים אחרים נראית "טבעית" וחשובה והם מזהים את ההזדמנויות ללמידה שהיא טומנת בחובה. לאחרים, תהליך הרפלקציה מצטייר כזר, הם אינם מבינים את מהותו, ובפרט אינם רואים בו תרומה לעבודתם. ישנם מורים שעושים את צעדיהם הראשונים ברפלקציה: הם מנסים להפעיל אותה על ידי הקשבה, צפייה זהירה בשיעורים ועוד, אם כי לעתים נראה כי הם מונעים עדיין מהצורך להסביר את עצמם לגורם חיצוני יותר מאשר מהרצון לחקור את ה"עצמי".

חקרי המקרה שהוצגו ממחישים את מורכבות ביצוע תהליך הרפלקציה, גם כשהוא נעשה תוך ליווי והנחיה (Finlay, 2008; Korthagen, 2014). מורים לא תמיד תופשים את ההוראה של עצמם כמושא ל"חקירה", והתבוננות כזו היא בגדר של הִתְעַמְּתוּת עם עצמם (Bruckheimer & Hershkowitz,1983), כמו במקרה של לביא ובראיון עם מירב. ניתן להסיק מן הממצאים כי תהליך רפלקטיבי אינו קורה לרוב מעצמו, אלא דורש למידה ותמיכה לאורך זמן. המקרה של מירב מעלה שלמידה כזו אפשרית, והיא עשויה לקרות על ידי הכרה בחשיבות התהליך. שינוי כזה בתפישה של המורים יכול לסייע בהפיכת ההתבוננות על עצמם מ"עימות" להזדמנות לחקירה וללמידה.

במחקר הרחב יותר, זוהו הזדמנויות לרפלקציה שהמרחבים השונים מספקים, וכן זוהו גורמים שונים שיכולים לסייע למורים בתהליך זה. אפיון של המרחבים יחד עם הכרה והבנה של סוגיות כגון מידת המוכנות לביצוע רפלקציה, שהודגמה במאמר זה, יכולות לסייע בעיצוב סביבות למידה בהן ניתן יהיה ללמוד לבצע רפלקציה משמעותית על ההוראה.

רשימת מקורות

רן, ע' (2016). רפלקציה: חשיבה מהרהרת ומערערת בחינוך. ל' יוספסברג בן יהושע (עורכת). ת"א: הוצאת מכון מופ"ת. אוחזר מ: http://library.macam.ac.il/study/pdf_files/d12284.pdf

Bruckheimer, M., & Hershkowitz, R. (1983). Inservice teacher training: The patient, diagnosis, treatment and cure. In P. Tamir, A. Hofstein & M. Ben-Peretz (Eds.), *Preservice and inservice training of science teachers* (pp.125-137). Balaban International Science Services.

Finlay, L. (2008). Reflecting on 'Reflective practice'. *Practice-based Professional Learning Paper* 52, 1-27. The Open University.

Karsenty, R., & Arcavi, A. (2017). Mathematics, lenses and videotapes: A framework and a language for developing reflective practices of teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20(5)*, 433-455.

Korthagen, F. A. J. (2014). Promoting core reflection in teacher education: Deepening professional growth. In: L. Orland-Barak & C. J. Craig (Eds), *International teacher education: Promising pedagogies (Part A),* (pp. 73-89). Emerald.

McAlpine, L., & Weston, C. (2002). Reflection: Issues related to improving professors' teaching and students' learning. In N. Hativa & P. Goodyear (eds.), *Teacher thinking, beliefs and knowledge in higher education* (pp. 59-78). Springer.

תפקידה של הרצאת סיכום המשלבת היסטוריית המתמטיקה בהוראתה. חקר מקרה: עמדות מורים ופרחי הוראה כלפי הנושא

<u>סבינה סגרה</u>, לינה ויניצקי-פינסקי

המכללה האקדמית אחוה

מבוא

בתקופה זו של מהפכת הידע והתפוצצות המידע, ארגון הידע מקבל תוקף מרכזי. במעבר להוראה וללמידה מקוונת, ארגון הידע הופך להיות גורם מרכזי בלמידה משמעותית. זוהי תקופה של שינויים גדולים בזמינות הידע. כאשר מקצועות נעלמים, המיומנות לרכישה וארגון ידע הופכת למטרה בפני עצמה. ניהול הידע הופך להיות פחות רלוונטי לתעסוקה עם סיום הלימודים. התקופה מציבה אתגרים חדשים כגון: דרישה חברתית מהמורים שתחום הידע יהיה רלוונטי עבור הלומדים, לצד שמירה על רלוונטיות הדרישות של המורים מהתלמידים.

עבודה זו חוקרת דרך שתאפשר להקנות לפרחי הוראה ולמורים הבנה לגבי מהו ארגון ידע וכיצד ניתן להשתמש בו. בנוסף נחקור את הכלי שפותח לארגון ידע תוך שמירה על למידה משמעותית. כדי ליישם את הכלי, בנינו במחקר הנוכחי שלוש הרצאות סיכום בשלושה נושאים מתמטיים בשילוב היסטוריה. לימדנו בכל נושא הרצאה אחת ששימשה כ"מארגן מאוחר" (delay organizer) (Goren & Galili, 2018). רק לאחר שהתלמידים רכשו במהלך הקורסים פריטי ידע ומיומנות בהרצאת הסיכום נעשה חיבור אונטולוגי בין פרטי הידע והדגשת ההיררכיה בין החומר הנלמד.

בדומה ל"מארגן מאוחר" שחקרו גורן וגלילי (Goren & Galili, 2018) במכניקה קלאסית, אנו יישמנו בהוראת מתמטיקה גישה חדשנית ומעשית מאוד ליישום ארגון הידע בתוך תוכנית הלימודים של פרחי הוראה ותוכנית הלימודים הבית ספרית. בהרצאות סיכום יישמנו גישה של דיסציפלינה תכני-תרבותית שפותחה באוניברסיטה העברית בירושלים (Galili, 2017, Tseitlin & Galili, 2005, Vinitsky & Galili, 2014). הרצאות סיכום שימשו כ"מארגן מאוחר" וסיפקו ללומדים בין היתר אפשרות להבניה של וריאציה מושגית ולמידה משמעותית, מענה לדרישת אלטרנטיבות של ידע מתחרה, ואת קיומה של אסטרטגיית השוואה.

למה היסטוריה? המחקר הנוכחי מתייחס לתפקיד ההיסטוריה בהוראת המתמטיקה. השילוב בין מדעים או מתמטיקה לבין ההיסטוריה שלהם חשוב משום שהוא מציג את הטבע האינטגרטיבי המצוי ביחסי הגומלין שקיימים בין ההישגים השונים והנפלאים של האנושות (Goren & Galili, 2019). המבט על ההיסטוריה מאפשר לתלמידים להבין שהמדע הוא תוצר של שיח דיאכרוני בין המדענים מתקופות שונות. טעויות הן חלק מתהליך הלמידה ומה שנחשב ל"נכון" בתקופה מסוימת, תלוי בשיפוט של המדענים ועלול להשתנות עם הזמן (Edwards, 2019). אנו טוענים שהיסטוריה הופכת לאנושית יותר את התוכן המדעי או המתמטי. עבור התלמידים, ההיסטוריה מאפשרת מבט פחות אבסטרקטי ויותר מעשי ומעניין על המתמטיקה (Libeskind, 2011). כדי להכניס תכנים היסטוריים באופן שיטתי לתוכניות הלימודים, כדאי לבדוק את תרומתם ללמידה ואת אופן שילובם בצורה מיטיבה ביותר. השילוב עם תכנים היסטוריים מרחיב את המבט של תלמידים וסטודנטים, מעורר חשיבה אינטגרטיבית ומגביר מוטיבציה (Goren & Galili, 2018).

שיטה

מטרות המחקר

- לבדוק אם קיימת קורלציה בין ותק וניסיון בהוראה של פרחי הוראה ומורים לבין גילוי עניין בהיסטוריית המתמטיקה והבנת התכנים המתמטיים.
- לבדוק את השפעת הרצאות הסיכום על העמדות של מורים ופרחי הוראה כלפי היסטוריית המתמטיקה, ידע טכני וחשיבות הרצאת סיכום המשלבת תוכן היסטורי.

שיטות המחקר ומהלך המחקר

המחקר הינו מחקר משולב – כמותי ואיכותני. במהלך המחקר הועברו הרצאות סיכום בשלושה תחומים שונים ובהמשך שאלונים מותאמים לתכני הרצאות. לשאלונים היו שני חלקים:

1. חלק מתמטי, כדי לבדוק את הבנת התכנים המתמטיים;
2. חלק "יצירת עניין", כדי לבדוק את העמדות כלפי היסטוריית המתמטיקה, הרצאת הסיכום המשלבת היסטוריה ואת מידת החשיבות שלה לנחקרים והרלוונטיות שלה עבורם.

בשאלון "יצירת עניין" הועברו הן שאלות דירוג, לדוגמה: "באיזה מידה נחשפת בלימודי המתמטיקה שלך לשילוב תכנים מהיסטוריית המתמטיקה?", והן שאלות פתוחות שהזמינו את המורים ופרחי ההוראה להביע את דעתם, לדוגמה: "מהו הערך המוסף של שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראת המתמטיקה?". בשאלות הדירוג הציון הגבוה ביותר היה 5 וסימן הסכמה מלאה.

שאלונים הועברו לאחר הקניית ידע בנושא והרצאת הסיכום. בהרצאות הסיכום הועברו הנושאים הבאים: מספרים ממשיים (בקורס בהוראת אלגברה והשתלמות למורים בבית הספר העל יסודי), ג'ון נפייר ופיתוח הלוגריתמים (בקורס "לוגריתמים לחטיבת ביניים"), גאורג קנטור והאינסוף (בתורת הקבוצות לפרחי הוראת מתמטיקה יסודי).

הנחקרים היו מורים שהשתתפו בהשתלמויות ופרחי הוראה במסלול הוראת המתמטיקה היסודי ובמסלול הוראת המתמטיקה העל-יסודי. רוב פרחי ההוראה היו ללא ניסיון מלבד ניסיון בעבודה המעשית. חלק קטן מהם עבדו כמורים מחליפים בבתי ספר, אך לא כמורים למתמטיקה.

בניתוח השאלונים הכמותיים התרכזנו בשאלות הבאות:

1. האם יש קורלציה בין וותק או המסלול הנבחר (יסודי או על-יסודי) לבין עניין בהיסטוריה?
2. האם יש קורלציה בין וותק לציון בשאלות תוכן?
3. האם יש קורלציה בין עניין בהיסטוריה לבין הציון בשאלות התוכן?
4. האם יש שוני בין הקבוצות הנחקרות – סטודנטים במסלול היסודי, במסלול העל יסודי ומורים בפועל – בהקשר ליחסם להיסטוריה ובהקשר לידע טכני?

בניתוח שאלונים איכותניים השאלות המרכזיות אשר עמדו נגד עינינו:

1. מהו הערך המוסף אותו רואים הנחקרים בשילוב היסטוריה בהוראה?
2. איזה ערך מוסף רואים הנחקרים בהרצאת סיכום בגישה של דיסציפלינה תכני-תרבותית?

ממצאי המחקר ודיון

בטבלה הבאה ניתן לראות את מספרי המורים ופרחי הוראה שהשתתפו בהרצאות הסיכום השונות וענו על השאלונים שהועברו בהמשך:

טבלה 1

מספר המורים ופרחי הוראה שהשתתפו בהרצאות סיכום השונות וענו על שאלונים

הרצאת סיכום	מורים	סטודנטים יסודי	סטודנטים על-יסודי
מספרים ממשיים	10	0	5
קנטור והאינסוף	1	12	0
לוגריתמים	0	0	4
בסה"כ	11	12	9

בנוגע לעמדות כלפי חשיבות השילוב של ההיסטוריה בהוראת מתמטיקה, נמצא הבדל בין קבוצת פרחי ההוראה בעל-יסודי והמורים מצד אחד לבין קבוצת היסודי מצד השני. לסטודנטים במסלול העל-יסודי ולמורים ההתייחסות להיסטוריה הייתה חשובה יותר מאשר לסטודנטים במסלול היסודי, כפי שניתן לראות בטבלה הבאה:

טבלה 2

דירוגים לחשיבות ההתייחסות להיסטוריה (1-5, כאשר 5 מציין הסכמה מלאה)

שאלה	דירוג ממוצע של מורים וסטודנטים במסלול העל-יסודי	דירוג ממוצע של סטודנטים במסלול היסודי
באיזה מידה שילוב היסטוריה בהוראת המתמטיקה מעורר בך עניין?	4.2	2.8
באיזה מידה שילוב היסטוריה בהוראת מתמטיקה יכול לעורר עניין אצל התלמידים?	3.8	2.7
עד כמה לדעתך כדאי לשלב היסטוריה של מתמטיקה בהוראת מתמטיקה?	4.2	2.7

כנראה, סטודנטים, אשר לומדים במסלול יסודי, מאמינים כי היסטוריית המתמטיקה פחות רלוונטית עבורם בגלל גילם הצעיר של התלמידים אותם הם עתידים ללמד. את ההשערה הזו כדאי לבדוק יותר לעומק.

בנוגע לידע הטכני נמצא הבדל בין קבוצות המורים לקבוצות פרחי הוראה, כך שלמורים היה ידע רב יותר מאשר לפרחי ההוראה. ממצא זה אינו מפתיע, כי הוא קשור לניסיון. בניתוח הסטטיסטי לא נמצא קשר בין היחס להיסטוריה לידע הטכני.

התגובות לשאלות הפתוחות הראו שלפחות חלק מהסטודנטים העריכו את חשיבותה, מטרתה וערכה המוסף של הרצאת סיכום המשלבת את היסטוריית הנושא המתמטי. להלן מספר תגובות שקיבלנו לשאלה "מהו הערך המוסף של שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראת מתמטיקה?":

- ✓ הבנה שהמקצוע הוא מתפתח עם השנים, עומק הידע משתנה עם הזמן...
- ✓ מוסיף עניין, מגביר את תחושת המסוגלות של התלמיד...
- ✓ להראות שגם נשים היו חכמות והוכיחו דברים...
- ✓ ללמד בפחות "פורמאליות" להציג לתלמידים פן נוסף במתמטיקה ולגרום להתעניין ולהבין מי עומד מאחורי החומר הנלמד..."

בהרצאות הסיכום ניסינו להרחיב את המבט של המורים ופרחי ההוראה, לעורר חשיבה אינטגרטיבית ולהציג את המתמטיקה בהקשר התרבותי שלה. בהרצאה על ג'ון נפייר ופיתוח מושג הלוגריתמים התייחסנו בין היתר גם למקלות נפייר (לביצוע הכפל), שהשפיעו מאוד על פיתוח מכונת החישוב הראשונה על-ידי וילהלם שיקארד.

בהרצאת סיכום על קנטור והאינסוף ציינו שקנטור התחיל לחקור את אינסוף המספרים הממשיים עקב עבודותיו על סכומים של פונקציות טריגונומטריות בעזרתם ניתן להציג פונקציה כלשהי (טור פורייה). העבודה על פונקציות טריגונומטריות גרמה לגאורג קנטור לשאול על אילו קבוצות מספרים הפונקציות הללו מוגדרות. כך הסטודנטים למדו שהצגה של אותות כחיבור המרכיבים ההרמוניים שלהן היא אבן ייסוד של הנדסת התקשורת. הקורס עצמו בתורת הקבוצות נלמד לפי הספר "תורת הקבוצות" מאת שמואל ברגר (2000). בספר זה מוסברים מונחים ונלמד סימון המתמטי. התוכן מורכב מאקסיומות, הגדרות, משפטים, הוכחות ותרגילים רבים.

הרצאת הסיכום על מספרים ממשיים עסקה בהתפתחות מושג המספר, שינוי תפיסתו לאורך ההיסטוריה, בהשוואה לתפיסות השונות של מספר ושאלת קיום מידה משותפת בין כל שני דברים מאותו סוג. בפרט, במעבר מאריתמטיקה לגיאומטריה, השתנה <u>ייצוג המספרים</u> <u>מנקודות</u> <u>בודדות</u> - "אבנים של פיתאגורים" ל<u>קטעים רציפים</u> - "קוים" (אונגורו, 1989) ותפיסה המשלבת את שתי הגישות.

חלק מהנחקרים הציעו להעביר "הרצאות מבוא" ולהתייחס בהן להיסטוריה, במקום הרצאות סיכום, כי הם שמו לב עד כמה ההתייחסות להיסטוריה יכולה להגביר את המוטיבציה. חשוב לנו לציין שבדרך כלל לרוב פרחי ההוראה אין מספיק רקע מתמטי טכני כדי להבין בתחילת השנה הרצאות המשלבות היסטוריה. המטרה של הרצאות סיכום היא לחבר בין תחומים שונים שפרחי ההוראה למדו במהלך השנה, לאפשר להם לראות קשרים בין פרטי הידע והתפתחות המתמטיקה בהקשר ההיסטורי. תרומתה וחשיבותה של הרצאת הסיכום גם בארגון ידע קיים, הדגשת רעיונות מרכזיים וראיית היררכיה של הידע.

לסיכום

זהו מחקר פיילוט, בהמשך כדאי לערוך מחקר על אוכלוסייה גדולה יותר של נחקרים, להעביר שאלוני תוכן לפני ואחרי הרצאת הסיכום, כדי לערוך השוואה ולחזק את טענותינו אודות החשיבות של הרצאת סיכום.

תרומתו של המחקר הנוכחי היא בשימת דגש על חשיבות הרצאת סיכום המשלבת את היסטוריית המתמטיקה ומשמשת כ"מארגן מסכם" של הידע . הגישה דיסציפלינה תכני-תרבותית מאפשרת ארגון ידע הנלמד בצורה היררכית ברורה ומאפשרת למידה משמעותית. למחקר השלכות רבות על תוכנית הלימודים הבית ספרית, על הכשרה של פרחי הוראה וידע המורים.

רשימת מקורות

אונגורו, ש. (1989). התחלתה של מתמטיקה היוונית. *מבוא לתולדות המתמטיקה, חלק א': הזמן וימי הביניים*. האוניברסיטה המשודרת, עמ' 75-52.

ברגר, ש'. (2000). *תורת הקבוצות*. תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

Edwards, H. M. (2019). The Role of History in the Study of Mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 66-69.

Galili, I. (2017). Scientific Knowledge as a Culture – a paradigm of knowledge representation for meaningful teaching and learning science. In M. R. Matthews (Ed.), *History, Philosophy and Science Teaching Research*. New Perspectives. Ch. 8., pp. 203–-233, Springer, Dordrecht

Goren, E., & Galili, I. (2018). A summary lecture as a delay organizer of students' knowledge of mechanics – a discipline-culture approach. *Electronic Proceedings of the 2017 ESERA Conference. Research, Practice and Collaboration in Science Education*. Part 1/1., (pp. 157-167). Dublin.

Goren, E., & Galili, I. (2019). Newton's Law- A Theory of motion or force? *J. Phys.: Conf. Ser.*, 1287.

Libeskind, S. (2011). *Teaching Mathematics for Prospective Elementary School Teachers: What Textbooks Don't Tell*. Primus, 21(5), 473-484.

Vinitsky-Pinsky, L., & Galili, I. (2014). The need to clarify the relationship between physics and mathematics in science curriculum: Cultural knowledge as possible framework. *Procedia-Social and Behavioral Sciences Journal*, 116, 611–616.

Tseitlin, M. & Galili I. (2005). Physics teaching in the search for its self: from a physics-discipline to a physics-culture, *Science and Education*, 14 (3-5), 235–-261.

פרקטיקות ליבה המיושמות בהכשרת מורי STEM במוסדות ההשכלה הגבוהה בישראל – תמונת מצב התחלתית

תקוה עובדיה, אורנים – המכללה האקדמית לחינוך, המכללה ירושלים

מבוא

הכשרת מורים, היא תחום מאורגן פורמאלית וממוסד. לעומת זאת, הכשרת מורי מורים היא תחום שאינו ממוסד פורמאלית. מכשירי מורים בעולם לרוב לא משתתפים בתוכניות הכשרה לקראת יישום תפקידם. חוקרים שעוסקים בתחום בחצי העשור האחרון מציעים לבחון את פרקטיקות הליבה שמבצעים מכשירי מורים בתפקידם כצעד ראשון על מנת ללמוד ממנו, ואולי לבנות מהעובדות שימצאו התחלה של תפיסה אודות אופי הפרקטיקות שמכשירים מיישמים בהוראתם, והיתכנות של מיסוד הכשרה פורמאלית למכשירי מורים, בהשראת פעולותיהם.

המושג "פרקטיקת ליבה בהכשרת מורים" זוכה להגדרות שונות בספרות. במחקר הנוכחי נתייחס למושג באמצעות ההגדרה המייחסת לו את החשיבות שהעניקו לו המרואיינים וחוקרים. פרקטיקה תחשב ליבתית, אם היא נמצאה במרכז העשייה של מכשיר המורים הן מבחינת החשיבות שהוא מייחס לה בעשייתו והן מבחינת השכיחות של יישומה, באמצעות פירוקה לפעולות הוראה.

המחקר הנוכחי הינו חלק ממחקר גדול בתחום, ומציג תמונת מצב חלקית אודות מאפייני פרקטיקות הליבה שמיישמים מכשירי מורים למתמטיקה ומדעים בישראל. המחקר מנסה לזהות ולאפיין את הפרקטיקות ולהשוות בין תחומי הדעת.

רקע תיאורטי למחקר

אף שקיימת הסכמה רחבה יחסית בנוגע לשאלה מה הדברים שעל המתכשרים להוראה ללמוד, יש מעט ידע מוסכם אודות האופן בו יש ללמד אותם (Darling-Hammond & Bransford, 2007; Hashweh, 2013; Kelchtermans & Vanassche, 2017). תשומת לב ניכרת הוקדשה לעידוד רפלקציה של פרחי ההוראה אודות תפקודם, לתהליכי פיתוח זהות מקצועית ולהשתתפות בקהילות למידה מקצועית (Korthagen, 2014). רק מעט דובר אודות האופן בו מכשירי מורים אמורים להקנות למתכשרים להוראה מיומנויות מרכזיות החיוניות לעבודתם השוטפת. אם אחת המטרות של תכניות להכשרת פרחי הוראה היא להביא את הסטודנטים המתכשרים להוראה למוכנות מקסימלית לתפקידם כמורים, הרי שמתבקש כי יזכו להיכרות עם אסטרטגיות הוראה אפקטיביות, והתנסות בהן, הן כלומדים והן כמורים מתלמדים. מכאן שמכשירי המורים אמורים לאמץ פרקטיקות מוכחות העומדות בהלימה לדמות המורה המצופה בבתי הספר. כל זאת במגמה להכשיר את הסטודנטים למפגש עם המציאות העדכנית בבתי הספר.

לאחרונה, מתחזקת הגישה המתמקדת בהוראת פרקטיקות ליבה בהכשרת מורים המגמה המסתמנת היא מעבר מדגש על הידע הדרוש להוראה, לדגש על השימוש בידע זה בפרקטיקה (Grossman, 2018). פרקטיקות ליבה הן מרכיבים בסיסיים בהוראה, הניתנים לזיהוי, באמצעות חקר פעולות ההוראה אותן מורי מורים נוקטים בעבודתם. הן כוללות פרקטיקות כלליות ופרקטיקות תלויות תוכן,

הן אסטרטגיות, שגרות וצעדים, אותן ניתן לפרק לחלקים וללמד מורים לעתיד. גרוסמן וחוב' (Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009) מתייחסים להגדרת פרקטיקות הליבה לפי קריטריונים כלליים, המתפרקים גם לפרקטיקות תלויות תוכן: פרקטיקות המתרחשות בתדירות גבוהה בהוראה, פרקטיקות שמורים מתחילים יכולים לנהל בכיתות על פני תכניות לימודים שונות או גישות הוראה שונות, פרקטיקות המאפשרות למורים מתחילים ללמוד באמצעותן אודות התלמידים ומעשה ההוראה, פרקטיקות המשמרות את שלמות ההוראה ומורכבותן בו זמנית ופרקטיקות מבוססות מחקר שיש בהן פוטנציאל לשפר את הישגי התלמידים.

לימוד מאורגן של פרקטיקות הוראה מתאר שורה של פדגוגיות בהן יכולים מורי מורים להשתמש כדי לסייע לפרחי ההוראה לפתח את כישורי ההוראה. הפדגוגיות כוללות ייצוגים של פרקטיקה (דרכים להראות כיצד נראית המיומנות ולפרקה לחלקים המרכיבים אותה) והתנסות בפרקטיקה. דוגמאות לפרקטיקות ליבה כוללות למשל הובלת דיונים, דרכים מגובשות לניהול ההוראה הכוללת למשל, עידוד חשיבת התלמידים ושמירה על נורמות בכיתה. ניכר שצריך לעשות יותר כדי לעזור לפרחי ההוראה לשלוט במיומנויות מקצועיות אלה, ולא רק להדגיש את הידע בתוכן. לצורך כך מורי מורים צריכים לאמץ מהלכים סדורים של הדגמת, המללת והבהרת פרקטיקות מרכזיות (Feiman-Nemser, 2012; Janssen, Grossman, & Westbroek, 2015; McDonald et al., 2013).

שיטת המחקר

המחקר הנוכחי מתמקד בניתוח שלושה סוגים של כלי מחקר שבאמצעותם נאספו נתונים: 13 ראיונות חצי מובנים של מכשירי מורי STEM באקדמיה הישראלית, ו־7 סטודנטים שלמדו בכיתותיהם, חומרי הוראה שהציגו מכשירי המורים, ותיעודי שיעורים שלהם.

תמלול הראיונות והשיעורים נותח באמצעות תוכנת אטלס טי (ATLAS.ti) לקודים שהם פרקטיקות לסוגיהן, וזוהו מתוכם פרקטיקות הליבה שמיישמים המכשירים בהוראתם. בנוסף, בוצעו ניתוחים סטטיסטיים בין הפרקטיקות על מנת לבחון קשרים בינהן. בניתוח התוכן מחוץ לתוכנה נעשה ניסיון לזיהוי, הסבר ופרשנות של הפרקטיקות בהתאם לתחום ההכשרה.

ממצאים

הממצאים מתחלקים לשלושה היבטים: היבט אחד מתייחס לאיפיון (זיהוי והגדרה) של פרקטיקות ליבה שמיישמים מכשירי מורי STEM בהוראתם. היבט שני מתייחס לקשרים בין הפרקטיקות, והיבט שלישי מתייחס להשוואת פרקטיקות שמיישמים מכשירי מורי המתמטיקה לעומת פרקטיקות שמיישמים מכשירי מורי המדעים.

בהיבט איפיון הפרקטיקות שמבצעים מכשירים מתחומי STEM נמצא כי קיימת רשימה של פרקטיקות שרובה חוזרת בהכשרות של מכשירי המורים עם שינויים באופן שבו הם מנכיחים ומיישמים את הפרקטיקה בהוראתם. כלומר לכל קהילה, יש פרקטיקות ליבה שהן שייכות לקהילה. יחד עם השוות יש פרקטיקות ליבה משמעותיות לתחום שמבוצעות על ידי מיעוט.

בהיבט המתייחס לקשרים בין פרקטיקות נמצאו קשרים בין פרקטיקות שניתן ללמוד מהן על אופני יישום של הפרקטיקות. למשל: איור 1 מציג טבלה המתארת את הקשרים המובהקים ושאינם בין פרקטיקות הליבה שנמצאו בהתרחשות הדדית (Code-co-occurrence). הטורים והעמודות הם

הקודים שנוצרו מניתוח תמלילי הראיונות עם המכשירים, השיעורים שלהם שתומללו, הראיונות עם הסטודנטים. הקודים הם שמות פרקטיקות שנוסחו בהתאם לנתונים.

איור 1

Code-co-occurrence: התייחסות לקשרים מובהקים בין פרקטיקות ליבה.

		a... 60	b... 102	c... 19	c... 93	com... 18	D... 14	D... 72	D... 7	e... 73	e... 72	impl... 29	i... 26
assessmen...	60		3 (0.02)		7 (0.05)	1 (0.01)		1 (0.01)		4 (0.03)	3 (0.02)	4 (0.05)	2 (0.02)
bridge to s...	102	3 (0.02)		1 (0.01)	10 (0.05)	2 (0.02)	5 (0.05)	10 (0.06)		8 (0.05)	7 (0.04)	7 (0.06)	3 (0.02)
case stadied	19		1 (0.01)		3 (0.03)		1 (0.03)	2 (0.02)	1 (0.04)	2 (0.02)	1 (0.01)	1 (0.02)	3 (0.07)
classroom...	93	7 (0.05)	10 (0.05)	3 (0.03)		3 (0.03)		15 (0.10)	1 (0.01)	8 (0.05)	12 (0.08)	4 (0.03)	6 (0.05)
communit...	18	1 (0.01)	2 (0.02)		3 (0.03)		1 (0.03)	2 (0.02)		2 (0.02)	1 (0.01)	1 (0.02)	
Developin...	14		5 (0.05)	1 (0.03)		1 (0.03)		4 (0.05)				1 (0.02)	
Developm...	72	1 (0.01)	10 (0.06)	2 (0.02)	15 (0.10)	2 (0.02)	4 (0.05)		2 (0.03)	9 (0.07)	6 (0.04)	7 (0.07)	
Discussion...	7			1 (0.04)	1 (0.01)			2 (0.03)				1 (0.03)	1 (0.03)
experience...	73	4 (0.03)	8 (0.05)	2 (0.02)	8 (0.05)	2 (0.02)		9 (0.07)			11 (0.08)	4 (0.04)	2 (0.02)
experienci...	72	3 (0.02)	7 (0.04)	1 (0.01)	12 (0.08)	1 (0.01)		6 (0.04)		11 (0.08)		3 (0.03)	4 (0.04)
inquiry tea...	26	2 (0.02)	3 (0.02)	3 (0.07)	6 (0.05)				1 (0.03)	2 (0.02)	4 (0.04)	1 (0.02)	

התאים המודגשים מתארים קשר מובהק בין שתי פרקטיקות בהכשרת מורים מתחומי ה-STEM. למשל, הפרקטיקה "פיתוח כישורים לנהל דיונים בכיתת המתמטיקה" נמצאה באינטראקציה מובהקת עם הפרקטיקה הכללית של "ניהול כיתה" (מסגרת אדומה באיור 1). במקרה זה ברור הקשר של התרחשות הדדית בין שתי הפרקטיקות, לכן הניתוח האיכותני לאירועים שקודדו באמצעות קודים אלה התמקד בזיהוי ואפיון הפעולות שיישמו מכשירי המורים כדי להכשיר פרחי הוראה לניהול כיתה שיש בה דיונים מתמטיים.

בנוסף, הפרקטיקה "גשר להכשרה לעבודה בבית הספר כארגון" נמצאה בקשר מובהק עם פרקטיקת הליבה "פיתוח זהות של מורה למתמטיקה" (מסגרת כחולה באיור 1). בניתוח איכותני (מחוץ לתוכנה) של רשימת האירועים משתי הפרקטיקות נמצא שההכשרה של מכשירי המורים, אשר מתמקדת בהכנה לעבודה כמורה למתמטיקה בתוך בית הספר, התייחסה במקרים רבים גם לזהותו של המורים ולתרומתם הכללית ללמידת המתמטיקה בבית הספר.

בהיבט השלישי, המתייחס להשוואה בין מכשירי המורים במתמטיקה למכשירי מורים מתחומי מדעים אחרים, נמצא כי המכשירים משני התחומים מיישמים פרקטיקות ליבה זהות – למשל, "הכשרה לניהול כיתה", "הכשרה לפיתוח הוראה המקדמת מיומנויות חשיבה", "הכשרה לעבודה בבית הספר כארגון", "קידום זהות מקצועית של מורה", "הכשרה לחקר ההוראה", "למידה באמצעות חקר עשיה וחוויה". בעוד שחלק מפרקטיקות הליבה הן גנריות, כגון "ניהול כיתה חושבת", נמצאו בקרב המרואיינים מגוון רמות וסוגי פירוק שלהן לפעולות הכשרה ספציפיות לתחום התוכן, כמו ניהול כיתה באמצעות עיצוב משימות מתמטיות או ניהול דיון מתמטי קוהרנטי.

דיון ומסקנות

הספרות בתחום החינוך המתמטי, בעיקר בארה"ב, מתמקדת בפרקטיקות ליבה שמיישמים מורי מתמטיקה, ומונה פרקטיקות הנחשבות כסטנדרטים להוראה (למשל: Max, & Welder, 2020), כגון ניתוח בעיות טרם פתרון, פיתוח חשיבה מופשטת, בניית טיעונים, חינוך לדיוק וקידום תפיסה מבנית.

לצד הסטנדרטים יש הדגמות למורים בתוכנית הלימודים ובספרי הלימוד. רק בשנת 2017 ארגון הNCTM ניסח עבור ATME (ארגון מכשירי המורים למתמטיקה) פרקטיקות להכשרת מורי היסודי, שקובצו מהסטנדרטים שהתפתחו בשני העשורים האחרונים (ראו איור 2).

איור 2

השפעתם של מסמכי התקנים וההמלצות להכשרת מורים מאז שנת 2000

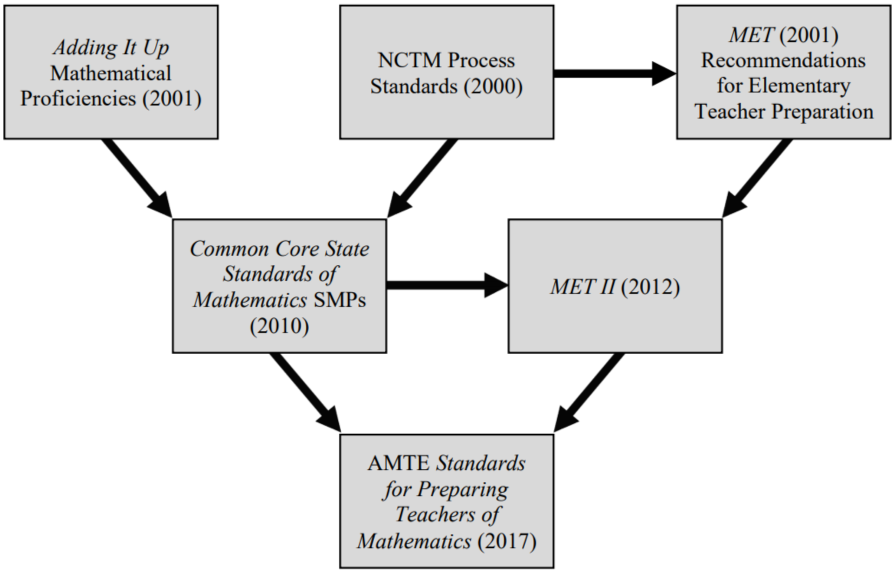


Figure 1: Flowchart illustrating the influence of standards and recommendations documents from distinguished organizations since 2000.

במחקר שביצעו מקס וולדר (Max, & Welder, 2020) הם בחנו את קיומה של הכשרה לסטנדרטים שהוגדרו כפרקטיקות להכשרה במתמטיקה (Standards for Mathematical Practice), במעל מאה קורסים שנלמדו, ואת האופן שבו ההכשרה לסטנדרט בוצעה. על השאלונים ענו סטודנטים ומכשירי מורים ומהם נגזרה תמונת מצב ההכשרה, הכוללת את מאפייני הפעולות של המכשירים, ואת האופן שבו תפסו הסטודנטים את פעולות ההכשרה בהתאם לכל סטנדרט – פרקטיקה. ממחקר זה גזרו את פעולות ההכשרה החסרות למכשירים שעליהן יש לעבוד באופן מוצהר.

בארץ עדיין לא יצא מסמך מאורגן הכולל את הפרקטיקות שעל מכשירי המורים למתמטיקה ליישם בהכשרתם. מכשירי המורים מכירים את תוכנית הלימודים ויודעים שעליהם – בין היתר –להכין את המורים לפתח מיומנויות לפתרון בעיות במתמטיקה, אך אין תוכנית המפרטת למורי המורים כיצד ניתן להכשיר לפיתוח המיומנויות הנדרשות.

פורזיני (Forzani, 2014) טוען שבכדי שמעבר להכשרת מורים מבוססת פרקטיקות ליבה אכן יתבצע באופן פורה, נדרשים מספר תנאים מקדימים: יצירת קונצנזוס אודות הפרקטיקות המרכזיות, ניסוח ובחינה של פדגוגיות הכשרת מורים התואמות לפרקטיקות, ותמיכה מוסדית באימוץ ושימור פדגוגיות אלו. המחקר הנוכחי מציג התחלה של איסוף נתונים וניתוחם לצורך השגת קונצנזוס באשר לפרקטיקות הליבה על ידי מומחי תחום הדעת כך שניתן יהיה, עם הגדלת היקף איסוף הנתונים, ללמוד ממנו אודות עיצוב פרקטיקות להכשרת מורי המורים בתחום המתמטיקה בפרט וה־STEM בכלל.

רשימת מקורות

Darling-Hammond, L., & Bransford, J. (2007). Preparing teachers for a changing world: What teachers should learn and be able to do. San Francisco, CA: John Wiley & Sons.

Feiman-Nemser, S. (2012). *Teachers as Learners*. Harvard Education Press.

Forzani, F. M. (2014). Understanding "Core Practices" and "Practice-Based" Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, *65*(4), 357–368.

Grossman, P. (Ed.) (2018). Teaching core practices in teacher education. Cambridge, MA: Harvard Education Press.

Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: theory and practice*, *15*(2), 273-289.

Hashweh, M. (2013). Pedagogical Content Knowledge: Twenty-Five Years Later. *Advances in Research on Teaching*, *19*, 115–140.

Janssen, F., Grossman, P., & Westbroek, H. (2015). Facilitating decomposition and recomposition in practice-based teacher education: The power of modularity. *Teaching and Teacher Education*, *51*, 137-146.

Kelchtermans, G., & Vanassche, E. (2017). Micropolitics in the education of teachers: Power, negotiation, and professional development. In D. J. Clandinin & J. Husu (Eds.), *The SAGE Handbook of Research on Teacher Education* (pp. 441–456). London: Sage.

Korthagen, F. A. J. (2014). Promoting core reflection in teacher education: Deepening professional growth. International Teacher Education: Promising Pedagogies (Part A) Advances in Research on Teaching, 22, pp. 73-89.

Max, B. & Welder, R. M. (June 2020). Mathematics teacher educators' addressing the common core standards for mathematical practice in content courses for prospective elementary teachers: A focus on critiquing the reasoning of others. In A. Appova, R. M. Welder, and Z. Feldman, (Eds.), Supporting Mathematics Teacher Educators' Knowledge and Practices for Teaching Content to Prospective (Grades K-8) Teachers. Special Issue: The Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, vol. 17, nos. 2 & 3, pp. 843–881. ScholarWorks: University of Montana. Retrieve (open access) from: https://scholarworks.umt.edu/tme

McDonald, M., Kazemi, E., & Kavanagh, S. S. (2013). Core practices and pedagogies of teacher education: A call for a common language and collective activity. *Journal of teacher education*, *64*(5), 378-386.

אופן שימוש בגרפים לפתרון בעיות תנועה: ניתוח מקרה של שימוש בגרף כתרשים משודרג

דפנה אליאס[1], אנטולי קורופטוב[2]

[1] אוניברסיטת תל אביב; [2] מכללת לוינסקי לחינוך

רקע תיאורטי קצר

בעיות תנועה הן בעיות מילוליות הנלמדות בישראל לראשונה בחטיבת הביניים ואז בשנות התיכון. תלמידים הלומדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל ניגשים לטופס 35581 בכיתה י"א. השאלה הראשונה בטופס זה היא בעיה מילולית – לרוב בעיית תנועה, ובתדירות נמוכה יותר בעיית הספק.

מניסיוננו, הטכניקה השכיחה לפתרון בעיות תנועה היא באמצעות טבלה בה מוזנים הנתונים (מהירות, זמן ודרך) לפי עמודות וע"י שימוש בנוסחה זמן*מהירות=דרך בונים משוואות ופותרים אותן. לצד הטבלה נעזרים לרוב תלמידים בתרשים עזר המסייע להבין את 'הסיפור' המוצג בשאלה.

מחקרים הראו שפתרון בעיות מילוליות הוא בין הקשיים העיקריים באלגברה לתלמידים ברחבי העולם. MacGregor & Stacey (1998) ציינו למשל את הקושי בניסוח משוואות אלגבריות עבור בעיות מילוליות. חוקרים אלה מצאו קונפליקט בין המודל הקוגניטיבי של התלמיד לסיטואציה ובין המודל הרשמי. לטענתם, המעבר ממודל של סיטואציה למודל אלגברי אינו בהכרח מעבר חלק. Nathan, Kintsch & Young (1992) טענו שייתכן ותלמידים מסוגלים להבין בעיה במונחים יומיומיים, אך אינם מסוגלים להציג את ההיבטים הפורמליים הנדרשים לייצור משוואה אלגברית.

אחד הניסיונות לסייע לתלמידים בהתגברות על קשיים אלה הוא בפיתוח גישה שונה לפתרון בעיות תנועה. גישה זאת דוגלת בשימוש בגרפים לפתרון הבעיה, במקום בטבלה. הנתונים מהשאלה מתורגמים לגרפים במערכת צירים קרטזית (בדרך כלל דרך/מהירות כפונקציה של זמן) ומשוואות או מסקנות נגזרות מהגרפים.

ניתן לטעון שבעבודה עם גרפים לפתרון בעיות תנועה ניתנת לתלמידים הזדמנות לקשר בין רעיונות מהעולם התיאורטי של החדו"א לעולם האמיתי (לדוגמה, הנגזרת של פונקציית המרחק לפי זמן היא המהירות). קישור כזה יכול לסייע לתלמידים לבנות משמעויות מועילות למושגים מתחום האנליזה.

יתר על כן, תיתכן הזדמנות לחיבור בעיות מילוליות עם תחומים מתמטיים שונים כמו חדו"א, גיאומטריה, אלגברה ועוד. ביטוי של תחום אחד בשפה של תחום אחר יכול להיות מועיל לשני התחומים (Duval, 2006), מעבר לכך שהקמת הקשר הוא ערך בפני עצמו היכול להיחשב נורמה סוציו-מתמטית (Yackel & Cobb, 1996).

בנוסף, להבדיל משימוש בטבלאות, שם המהירות היא מספר המוזן כנתון, שימוש בגרפים מאפשר שיחה על מהירות כקצב שינוי. מחקרים הראו (Stump, 1999, 2001) שלמורים ולתלמידים משמעויות שונות בקשר לשיפוע. הדגשת מהירות רכב קבועה כשיפוע הקו בפונקציית המרחק כתלות בזמן, יכולה לסייע בביסוס התפיסה של שיפוע כקצב שינוי בין שני משתנים.

מחקרים הראו (Thompson, 2016) שניתן לצפות מתלמידים לפתח משמעויות כמפורט לעיל, רק אם המשמעויות האישיות של המורים מתאימות. אנו סבורים שהמשמעויות שיש למורים למושגים כמו גרף, נגזרת וכיו"ב משפיעות על בחירתם לניצול (או אי ניצול) הזדמנות כמו פתרון בעיות תנועה לפיתוח משמעויות אצל תלמידיהם. לפיכך יש טעם לדון בשאלה – אילו מטרות רואים מורים לנגד עיניהם כשהם בוחרים לפתור בעיות תנועה בעזרת גרפים? כנגזרת משאלה זאת עולה שאלת המחקר הנוכחי - *באיזה אופן מורים נעזרים בגרף לפתרון בעיות תנועה?*

מידע מתודולוגי

המחקר הוא מחקר נלווה למחקר העוסק במשמעויות של מונחי יסוד בחדו"א בקרב תלמידי תיכון.

שאלת המחקר, כאמור, היא: באיזה אופן מורים נעזרים בגרף לפתרון בעיות תנועה? יש לציין שמחקר זה בודק בעיות תנועה ברמת תיכון ועוסק רק בבעיות בהן המהירות קבועה.

המשתתפים הינם מורים המלמדים מתמטיקה ברמת 5 יח"ל בכיתות י' ו- י"א המלמדים פתרון בעיות תנועה באמצעות גרפים. לצורך מחקר זה בוצעו ראיונות בני כשעה עם כל מורה, באמצעות תוכנת ה"זום". הראיונות הוקלטו ותומללו. מורים אשר הכינו מצגות או דפי הסבר לתלמידיהם התבקשו להעביר אל המראיין את חומרי הלימוד בהם עשו שימוש. הראיונות וחומרי הלימוד נותחו באופן איכותני. צוות המחקר בנה מספר קטגוריות לפיהן סווגו ציטוטים משמעותיים מהראיונות.

ממצאים (תוצאות ביניים)

השיטות בהן מורים משתמשים בגרף בפתרון בעיות תנועה סווגו לשלושה סוגים מרכזיים:

גרף כמודל אולטימטיבי

בשיטת פתרון זאת, הנתונים מתורגמים לגרף בצורה עקבית והבעיה נפתרת במסגרת הגרף עצמו. אחת המטרות של המורה בדרך פתרון מטיפוס זה היא בניית מערכת הגרפים עם חיבור לעולם החדו"א. משמעות בחירה זאת היא, לדוגמה, שלכל גרף מוגדרת משוואה שמתאימה לו ($y=vt+b$). המורה הבוחר בשיטה זאת מדגיש כי המהירות של כל כלי נותנת לנו את קצב השינוי הקבוע של הפונקציה (השיפוע). בשיטת פתרון זאת, חלק מהבעיות נפתרות ע"י הצגת מהירות כפונקציה של זמן על מנת לתת אפשרות לדבר על דרך כהצטברות (חיבור למונחים אינטגרל ושטח).

שילוב בין הגרפי לאלגברי

שיטת פתרון זאת דומה לשיטה הראשונה בכך שהנתונים מתורגמים לגרף בצורה התואמת את "חוקי עולם הגרפים" לצורך ארגון החשיבה. יחד עם זאת, בשיטה זו, פתרון הבעיה עצמה נעשה באמצעות משוואות אלגבריות. המשוואות תהיינה תוצאה של עבודה עם גרפים לטובת זיהוי יחסים בין הנתונים (זמן, מהירות, דרך) אך ללא שימוש בידע שגרף יכול לספק (חיתוך בין ישרים, שיעורי נקודות וכדומה).

תרשים משודרג

בשיטת פתרון זאת, הנתונים מוצגים בגרף אך ורק לצורך הצגה ויזואלית נוחה. בהצגת הנתונים בגרף אין עקביות עם החוקים והנורמות הנהוגים בעבודה עם גרפים. פתרון הבעיה נעשה באמצעות שימוש בנוסחה הידועה לבניית משוואות אלגבריות. שיטה זאת דומה ויזואלית לתרשים הנפוץ שמלווה

לעיתים את פתרון באמצעות טבלה אך מאפשרת הצגה דו-ממדית של שני נתונים (למשל, זמן ודרך מיוצגים באמצעות צירים) כך שגם הקשר ביניהם מקבל ייצוג ויזואלי (קו ישר שמייצג את התנועה). שיטת פתרון זאת מתאפיינת בכך שהשימוש בגרף משמש דרך נוחה להצגת נתונים, בצורה שאינה בהכרח עקבית מתמטית, במובן שלא כל חוקי המתמטיקה נלקחים בחשבון, כפי שיפורט בהמשך. חוסר עקביות זה אינו נעשה מתוך בחירה אלא באופן לא מודע, בדרך כלל, ואינו מפריע להגעה לפתרון הנכון של השאלה המסוימת אותה פותר המורה.

חשוב להדגיש כי שלוש השיטות לפתרון יכולות כולן להוביל לפתרון נכון לבעיית התנועה. בדיווח זה אנו מתמקדים רק בשיטת הפתרון לה קראנו תרשים משודרג.

ניתוח מקרה – השימוש של המורה מאיה (שם בדוי) בגרף כתרשים משודרג

בחרנו להציג ניתוח מקרה של מורה אשר מלמדת פתרון בעיות תנועה באמצעות גרף בשיטה שאנו קראנו לה "תרשים משודרג". מאפייני השיטה יוצגו באמצעות ציטוטים מהריאיון שנערך עם מאיה ומצילומי מסך של מצגת בה נעזרת מאיה בהוראת הנושא.

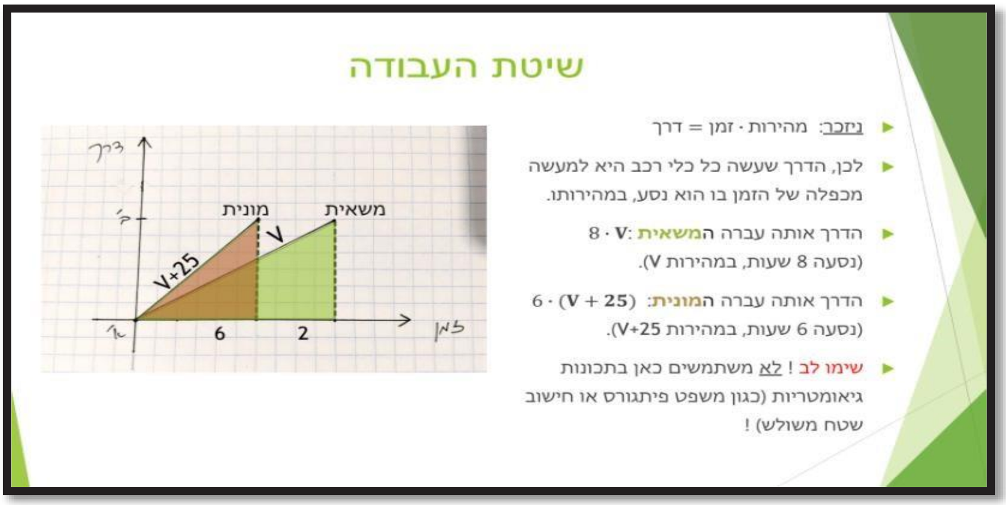
שימוש בגרף אך ורק לצורך סימון הנתונים

כשמאיה נשאלת מדוע בחרה ללמד בעיות תנועה תוך שימוש בגרפים, היא עונה:" ... כשאני מנסה לעבוד עם טבלה אני עדיין מוצאת את עצמי עושה כן ציר זמן כלשהו, או דרך, ואומרת הוא נסע לפה והוא חזר ומה קרה. הגרף מבחינתי נותן כאילו ראיה על הסיפור של מה שקרה." היתרונות המוצגים דומים ליתרונות של שימוש בתרשים עזר.

בשיטה זאת, הישרים המשורטטים בגרף הם אמצעי עזר ויזואלי ואינם מזוהים עם פונקציות קוויות על מאפייניהן השונים. עדות לכך נמצאת כאשר מאיה נשאלת אם היא רואה בישרים המשורטטים פונקציות ומשיבה:..." אם זאת היתה האסוציאציה הראשונה שהייתה עולה לי? לא. יכול להיות שאני כבר התרגלתי לעבוד בקונבנציה הזאת, אני כבר רואה את הגרפים האלה, אני כאילו רואה 'מהירות, זמן, דרך'. המוח שלי עובד נורא כאילו.... נורא כבר טכני. "

איור 1

שקף המציג את שיטת העבודה המומלצת ע"י מאיה, כפי שהוצג לתלמידיה



כפי שניתן לראות באיור 1, מאיה מסמנת את המהירות לצד הישר המתאים. במושגי עולם הגרפים. היא מסמנת את השיפוע לצד הישר, נוהג אשר אינו מאפיין עבודה עם גרפים – לרוב לצד הישר יצוינו שם הפונקציה או משוואת הישר. מאיה מסבירה: "בוא נגיד, זה יכול לסמל משקל אם תרצה. אני מסתכלת על זה כסוג של משקל כי זה המהירות של כלי הרכב אבל זה גורם ההכפלה שלי, זה הפקטור שלי. ככה אני רואה את זה לפחות". כאשר יש חיבור מוחלט בין הישרים לבין ערכי המהירויות נראה בכך עדות לכך שהשימוש בגרף הוא לסימון נתונים גרידא, דהיינו תרשים משודרג.

ניתן לראות בשקף שהתלמידים מונחים להשתמש בנוסחה לפיה מהירות*זמן=דרך למציאת הדרך שעבר כל רכב, ואין שימוש בגרף עצמו לצורך פתרון הבעיה (לא נמצאו משוואת הישרים, לדוגמה).

חוסר קונסיסטנטיות מתמטית

מאיה מדגישה בשקף המוצג באיור 1 שאין שימוש בתכונות גיאומטריות לפתרון הבעיה. יחד עם זאת, ניתן לראות כי צבעה את המשולשים הנוצרים על ידי הישרים ששורטטו. כשנשאלה על כך השיבה: "אין פה הסתכלות גיאומטרית. אנחנו לא עושים פה נגיד משפט פיתגורס כדי למצוא את הצלעות או דמיון משולשים. אלא זה כמו placeholder. [...] עכשיו המשולש פשוט נועד כדי לסמן, לפחות במצגת, איזו צלע אני מכפילה באיזו צלע. אבל זה לא בהקשר של שטח המשולש, או משהו כזה, זה רק מי יצר את הדרך הזאת. המהירות שלה כפול הזמן שלה. אותו דבר המשולש הכתום של המונית." ובהמשך "אני פחדתי שיתחילו לעשות מזה שאלה בגיאומטריה. זה יכול להיות מקור לטעויות."

ציטוטים כאלה יכולים להתפרש כך שלדעתה של המורה לא חובה שתהיה משמעות או עקביות גיאומטרית. ייתכן ומשפט מסוים (פיתגורס) לא יהיה תקף או שיהיה חסר משמעות. המורה אינה מסבירה מדוע צלע אחת כפול השנייה שווה לצלע השלישית במשולשים אלה (בהסתכלות גיאומטרית או גרפית אין בכך הגיון). אנו רואים בכך עדות שישנה חוסר עקביות שאינה במודעות של המורה.

נושא נוסף המציף את עניין השמירה על העקביות הוא פתרון בעיות עם נסיעה בכיוונים מנוגדים (לדוגמה: האחד נוסע מעיר A לעיר B והשני נוסע מעיר B לעיר A). בגרף יש לשרטט ישרים כך שהאחד עולה והשני יורד. שיפוע הגרף היורד הינו שלילי אך כדי להימנע מעיסוק עם מהירות שלילית, היות ובשיטת "התרשים המשודרג" הגרף נועד אך ורק לסימון נתונים, מאיה מסמנת את המהירות כחיובית. לדבריה: "בגלל שדרך אנחנו מסתכלים עליה כערך מוחלט, אין כאן דרך שלילית [...] פה זה אולי החיסרון של השיטה עם הגרף. נראה שרטוט לא טבעי, לא ברור מה אתה רוצה להגיד שם. " כאשר אין הלימה בין אספקטים גרפיים לבין אספקטים אלגבריים (גרף יורד המסומן כבעל שיפוע חיובי, לדוגמה) נראה בכך עדות לכך שהמורה פותרת בשיטת "תרשים משודרג."

הצעה לסוגיות רלוונטיות לדיון במליאה

- האם עקביות היא נורמה סוציו-מתמטית בעלת ערך? באיזה מחיר?
- מהם הקריטריונים לפיהם מורה יכול להחליט בסיטואציה נתונה באיזו שיטה להשתמש ?

המחקר נתמך על ידי הקרן הלאומית למדע, מענק 19/1743.

רשימת מקורות

Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103-131.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1998). Cognitive models underlying algebraic and non-algebraic solutions to unequal partition problems. *Mathematics Education Research Journal*, *10*(2), 46-.06

Nathan, M. J., Kintsch, W., & Young, E. (1992). A theory of algebra-word-problem comprehension and its implications for the design of learning environments. *Cognition and instruction*, *9*(4), 329-.983

Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124–.41

Stump, S. L. (2001). High School Precalculus Students' Understanding of Slope as Measure. *School Science and Mathematics*, 101(2), 81–89.

Thompson, P. W. (2016). Researching mathematical meanings for teaching. In English, L., & Kirshner, D. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 435-)164. London: Taylor and Francis.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-47.7

האם פתרון לבעיה מתמטית בכיתה יכול להיות שונה מפתרון לאותה בעיה כשהיא מחוץ לכיתה?

רונית בסן־צינצינטוס, סמינר הקיבוצים – המכללה לחינוך לטכנולוגיה ולאמנויות

מבוא

הרעיון למחקר עלה בעקבות דיון על תשובות של תלמיד שפתר בעיה מספר הלימוד שלו, שבה מתאים, לכאורה, ליישם את מודל היחס. התלמיד הציג מספר פתרונות אפשריים שונים לבעיה, אך התלבט לגבי מעמדם המתמטי בהכירו את דעת המורה שלו על התאמת מודל במצב כמו זה המתואר בבעיה. התהליך בו מתאימים את המודלים והכלים המתמטיים לסיטואציות השונות נקרא תהליך המידול. למורים תפקיד חשוב בבנייה של הבנת התהליך על ידי תלמידים, ולכן חשוב לקדם את תפישותיהם. כלומר, יש צורך בשינוי הידע והתפישות של המורה לגבי תפקיד המתמטיקה בפתרון בעיות ובשינוי האמונות שלו בנושא זה. במחקר נבנה רצף הוראה במטרה להעמיק הבנתם של מורים ופרחי הוראה לגבי מהות הקשר בין סיטואציה לבין המודל המתמטי המותאם לה.

רקע תאורטי

המחקר הנוכחי עוסק ביחסי הגומלין בין מודלים מתמטיים לפתרון בעיות מילוליות והבאתם למודעות של מורים למתמטיקה. המידול מאפשר בניית מודלים מתמטיים המתמקדים במאפיינים מבניים של מערכות שאינן מתמטיות (Lesh & Doerr, 2003). זהו מעין גשר המחבר בין המתמטיקה השימושית, זו המכונה בפי התלמידים *המתמטיקה של המציאות*, ובין המתמטיקה המופשטת והפורמאלית. הגשר המחבר בין בעיה מתמטית הניתנת בשיעור ובין בעיה בחיי היום-יום (Greer, 1997).

למורה תפקיד חשוב בקביעת הדרכים שבהן תלמידים פותרים בעיות. כדי לגרום לתלמידים לשנות את התייחסותם לפתרון בעיות, יש צורך בשינוי של הידע, של התפישות ושל האמונות של המורה על תפקיד המתמטיקה בכלל, ועל פתרון בעיות בפרט. יאקל וקוב (Yackel & Cobb, 1996) חקרו את למידת המתמטיקה כפעילות חברתית בכיתה במטרה להסביר כיצד תלמידים מפתחים אמונות וערכים מתמטיים, ואיך כתוצאה מכך מתפתחת אצלם חשיבה עצמאית במתמטיקה.

רוב התלמידים פותרים בעיות מילוליות לפי "כללי המשחק" של המערכת שבה הם נמצאים, היינו, הכיתה שבה הם לומדים (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002). לתלמידים מערכת הנחות סמויות באשר לפתרון הנכון של בעיות מילוליות, מערכת הנובעת מניסיונם בכיתה ומתגובותיהם של המורים לפעילותם בעבר. לרוב, תלמידים מניחים שכל בעיה הכתובה בספר או הניתנת על ידי המורה ניתנת לפתרון, ושכל המידע הנדרש מופיע בשאלה המילולית. כמו כן, הם מניחים שאין צורך להקיש מידע נוסף כדי להגיע לפתרון, ויוצאים מנקודת הנחה שלכל בעיה יש בהכרח פתרון מספרי, מדויק ויחיד. נוסף על כך, תלמידים סבורים שהפתרון לבעיה מילולית צריך להתקבל באמצעות פעולות מתמטיות, וחייב להתחשב בכל הנתונים המוזכרים בשאלה. לרוב הם מצפים לפתרון המכיל מספרים שלמים ולא גדולים, ומרגישים שהם אינם צריכים להיות מוטרדים אם הפתרון לא תואם את הידע היום־יומי שלהם.

מתברר כי גם תלמידים שלא התחשבו בשיקולים הקשורים למציאות היום־יומית מבדילים בין "העולם הבית ספרי" והמתמטיקה שבו ובין המציאות שבה חיים מחוץ לבית הספר. גריר (Greer, 1997) מצטט קטע מראיון עם תלמיד שמתייחס לקשר שבין בעיות מתמטיות ובין נסיבות מהמציאות היום-יומית: *"אני יודע את כל הדברים האלה* (הנסיבות המציאותיות), *אבל אני מעולם לא אחשוב להכליל אותם בבעיה מתמטית. מתמטיקה זה לא הדברים האלה, אלא לקבל תוצאות נכונות בבית הספר, ואתה לא צריך לדעת דברים מבחוץ כדי לקבל תוצאות נכונות*".

הסתבר כי התלמידים חשבו על קישור למציאות בזמן תהליך פתרון הבעיה אך בסופו של דבר התעלמו מקביעת מתן התשובה הסופית, כי חשבו שמצפים מהם לתת תשובה "רגילה" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002).

מחקרים בנושא השתנות מורים, עסקו בשאלות מדוע מורים אינם מיישמים חידושים כפי שמפתחיהם ציפו. אחד ההסברים לכך הוא שהמורים נדרשו לבצע שינויים שנכפו עליהם מגורמים חיצוניים בלי לקחת בחשבון את אמונותיהם, מחשבותיהם, וקשייהם (Richardson, 1990). מחקרים שחקרו מתי הצליחו תהליכי שינוי בהוראה, מצאו שאחד הגורמים החשובים להצלחה היה שיתוף ומעורבות המורים בתהליך השינוי ובקבלת ההחלטות. קיימת אשליה שיש צורך בהצגת בעיות מורכבות ומסובכות על מנת להסביר למורים תפישה מסוימת, ולהוביל אותם לפעול על פיה. אך לא כך הדבר. ישנו דווקא יתרון בסיטואציות פשוטות המקלות על ההבנה, ולכן מומלץ לעשות שימוש במצבים לא מסובכים, בהם ניתן להיעזר בקלות להצגת הרעיון הכללי של הבעיה (Peled & Suzan, 2013). בבעיות שבהן ניתן ליישם יותר ממודל מתמטי אחד, הבאה של מורים להבנה הזו אינה משימה פשוטה. ישנן אסטרטגיות הוראה שונות לעשות זאת. לשם שיפור ההבנה של מורים ושינוי גישתם לפתרון בעיות נבחרה שיטת הקונפליקט הקוגניטיבי, שהוכיחה עצמה ככלי הוראה המאפשר שינויים בנושאים מתמטיים שונים (Springer & Borthick, 2007). טכניקה זו מביאה את המורים לשינוי התפישתי הנדרש, ולהבנה של מהות השימוש במודלים מתמטיים (Peled & Balachef, 2011). שיטת הקונפליקט הקוגניטיבי יושמה אף במחקר זה וניתן לראות כי היא אכן הביאה לשינוי משמעותי בתפישתם והכרתם של המורים.

מטרת המחקר: בחינת השפעת רצף ההוראה שנבנה בגישת המידול על תפישות המורים את תפקיד המתמטיקה.

שאלת המחקר: האם ביצוע רצף של הוראה מתוכנן יכול להוביל לשינוי בתפישות של מורים ופרחי הוראה על תפקיד המתמטיקה ועל המשמעות של התאמת מודל מתמטי בפתרון בעיות מילוליות?

שיטה

אוכלוסיית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה 42 משתתפים, מורים ופרחי הוראה במכללה להכשרת מורים במרכז הארץ, בשתי קבוצות. באחת 23 מורים המלמדים מתמטיקה בכיתות א'-ו' בבתי ספר יסודיים ובאחרת 19 פרחי הוראה אשר הכשרתם היא הוראת מתמטיקה לבית הספר היסודי. חתך המשתלמים הן בקבוצת המורים והן בקבוצת פרחי ההוראה היה דומה מבחינת רקע כלכלי, חברתי ותרבותי. לקבוצת המורים היה ותק בהוראה מעל שש שנים ואילו לקבוצת פרחי ההוראה שהיו בשנת הלימודים השלישית שלהם לא היה ותק בהוראה כלל, פרט להתנסות מעשית במסגרת לימודים במכללה.

כלי המחקר

כלי המחקר כללו רצף משימות הוראה וחלק איכותני אשר כלל את ההסברים, הנימוקים והדיונים לאורך סדנת ההשתלמות. תחילה, נבנה בסיס להכנת רצף משימות בו נאספו דוגמאות של בעיות ודוגמאות של תשובות תלמידים לדוגמאות. אלו התבססו על הראיונות עם מומחים מתחומי דעת שונים. התבצע ניתוח של הדוגמאות ואפיונן של הבעיות אל מול בעיות מספרי לימוד וממחקרים שונים אשר בעזרתם נבנו כלי ניתוח ומיון בגישת המידול.

רצף משימות ההוראה התחלק לארבעה נושאים הקשורים בפתרון בעיות: שיקולי מציאות, אבחנה בין סוגי בעיות, סטטוס מתמטי של הפתרונות, ותפישת תפקידי המתמטיקה. בכל אחד מהנושאים חולקו המשימות לשלוש קבוצות: משימות שלפני תפעול הקונפליקט הקוגניטיבי, התפעול שלפיו נעשה הקונפליקט הקוגניטיבי ומשימות שלפיהן נעשו בדיקות להשפעת התפעול.

שיטת המחקר

המחקר התבצע במסגרת סדנאות להשתלמות מורים ופרחי הוראה. במחקר שולב ניתוח כמותני ואיכותני. הניתוח הכמותני בדק את מידת האפקט של מהלך ההוראה על ידי השוואת תפישות המורים בתחילת ההשתלמות כנגד תפישותיהם בסוף ההשתלמות. הניתוח האיכותני עוקב אחר מאפייני תהליך השינוי במהלך השתלמות המורים ופרחי ההוראה, במטרה לאתר את העוצמות והחולשות של מהלך ההוראה שנבנה. זוהי למעשה גישה מחקרית מעצבת, המאפשרת להגיב תוך כדי התהליך.

המחקר כלל שלושה שלבים עיקריים: השלב הראשון, בו פתרו המשתלמים משימות ראשוניות; השלב השני, ההתערבות, שמטרתו הייתה לעורר את המודעות למידול, והשלב האחרון, שבו פתרו משימות נוספות, ושנועד לבדוק אם חלו שינויים בתפישות המשתלמים בעקבות רצף ההוראה שהוצג להם ובעיקר בעקבות ההתערבות. רצף המשימות עסק בארבעה נושאים הקשורים בפתרון בעיות: שיקולי מציאות, הבחנה בין סוגי בעיות, סטטוס מתמטי של פתרונות, ותפישת תפקידי המתמטיקה. פתרון המשימות כלל פעולות שונות ובהן: פתרון אישי של הבעיות, התייחסות לפתרונות שונים, מיון הבעיות, השוואה בין הבעיות במטרה למצוא את הדומה ואת השונה ביניהן, התייחסות לראיונות מומחים ודיונים שנבנו במיוחד כדי להבליט מאפיינים מסוימים של הבעיות. מטרת הפעולות הייתה להביא לשינוי בתפישות המשתלמים דרך קונפליקט קוגניטיבי וכמובן דרך התהליך כולו. בסיום הועברו כמה משימות נוספות אשר נועדו לוודא שהמורים אכן עברו שינוי כלשהו.

דיון ביחס לספרות

בהתייחס **לשיקולי המציאות** חל שיפור ואכן ניתן לראות כי לכל המשתתפים היתה ירידה בשימוש בהיגדים המסורתיים שנשענים על פתרונות קלאסיים סטנדרטיים (שמקובלים בשיעורי מתמטיקה) ועליה בהיגדים האלטרנטיביים הנשענים על מודלים מתמטיים אחרים (שלא עומדים בקנה אחד עם הנורמות המקובלות בכיתה). לדוגמא, תחילה נבחרו כנכונים ההיגדים המסורתיים. לעומת זאת, לאחר רצף המשימות שהציגו דוגמאות לפתרונות הנשענים על שיקולי מציאות ובמיוחד לאחר משימת הקונפליקט והעיסוק בדברי המומחים שהעידו על שימוש בשיקולי המציאות בתהליך עבודתם, היתה עליה בשיקולי המציאות בהתייחס להיגדים האלטרנטיביים. המשתתפים נחשפו להיגדים שונים, מסורתיים ואלטרנטיביים, ובעקבות זאת חשבו על פתרונות נוספים מזווית ראיה שונה המביאה בחשבון שיקולי מציאות.

יש לציין שבאופן כללי הן אצל המורים והן אצל פרחי ההוראה גם במדידת ה"לפני" וגם במדידת ה"אחרי" עדיין הגישה המסורתית בפתרון בעיות היתה רבה יותר מאשר הגישות האלטרנטיביות. ממצאים אלה אכן עולים בקנה אחד עם הנחות המחקר הנוכחי שבהן תוכנית ההתערבות אשר מרכזה בהפניית המורים ופרחי ההוראה לראייה מעמיקה בהיבטים נוספים של בעיות מתמטיות ולא להתמקד בהיבט אחד בלבד, אכן מביאה את המשתתפים לכוון חשיבה בעל סממנים יותר אלטרנטיביים מאשר מסורתיים, אף כי בשלב ראשוני זה עדיין שיקולי מציאות מסורתיים בולטים יותר מאשר האלטרנטיביים.

יתכן, כי העובדה שיש יותר היגדים מסורתיים מראה את העומק בחינוך שמורים ופרחי ההוראה התחנכו על פיהם לאורך השנים. החינוך הזה מקבע, מקשה ולא מאפשר פתיחות לדרך חדשה. ריצ'רדסון מתאר את התהליכים וההתרחשויות שעוברים המורים והמצבים הפוקדים אותם בכיתות במהלך עבודתם (Richardson, 1990). לדבריו, מתברר כי לאור השינויים המהותיים אשר מנסים להכניס להוראה, קיים קושי בקרב המורים לצעוד בנתיב הוראה שונה מזה שהורגלו בו. ההשפעה החזקה של בית הספר על המורים ודרך העבודה שלהם הן כתלמידים והן כמורים, אשר אינה מעודדת שאלות מן העולם האמיתי, גורמת להם לא להתחשב בשיקולי המציאות.

מורים מחוייבים לתוכנית הלימודים. הם מורגלים לעבוד על פיה ולכן מבחינים בין פתרון בעיות בית הספר לבעיות במציאות. בעקבות התייחסות המורים למתרחש בכיתותיהם בכל הקשור לפתרון בעיות, גם תלמידיהם נוטים להתייחס לפתרון הבעיות בצורה דומה. ממחקרים, הסתבר כי תלמידים אשר תחילה חשבו על קישור למציאות בתהליך פתרון בעיות אך בסופו של דבר התעלמו ממנו, עשו זאת כי חשבו שמצפים מהם לתת תשובה "רגילה" (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2002). תלמידים נוטים לאמץ לעצמם אסטרטגיות פתרון מתוך חיקוי הפתרון של בעיות אנלוגיות מבלי לקחת בחשבון או לנתח שיקולים רלוונטיים כמו שיקולי מציאות. לכן במחקר זה, תוכנית ההתערבות חושפת לשיקולי מציאות ומביאה את המורים ואת פרחי ההוראה להכרה כי בעיות הניתנות בשיעור מתמטיקה ובעיות הניתנות מחוצה לו ראויות לפתרון זהה המתחשב בשיקולי המציאות.

ממצאים אלה תומכים במה שאמרו וורשפל וחוב', כי תלמידים פותרים בעיות מילוליות לפי "כללי המשחק" במערכת בה הם מעורבים – בכיתה בה הם לומדים. לתלמידים מערכת הנחות סמויות לגבי פתרון בעיות מילוליות. לדוגמה, אחת ההנחות הנפוצות בקרב התלמידים הינה שאין להיות מוטרדים אם הפתרון מפר את הידע היומיומי. זאת כמובן מפני שאת הבעיות בכיתה אין פותרים התלמידים בהתבסס על שיקולי מציאות, אלא עפ"י מוסכמות אחרות – מוסכמות "מתמטיות" הנלמדות בבית הספר (Verchaffel, Greer & De Corte, 2002). מתוך ממצאי המחקר עלה כי לגבי שיקולי מציאות אומנם חל שיפור ברמת החשיבה והמשתתפים חושבים אחרת, חשיבתם יותר רב־ממדית מאשר היתה לפני כן, אך עדיין יש מקום לשיפור.

תרומת המחקר הנוכחי היא בבדיקה וביישום של תכנית התערבות הכוללת קונפליקט קוגניטיבי. הממצאים מצביעים שהקונפליקט והדיון סביבו מאפשרים שיפור בחשיבה המתמטית המטה־קוגניטיבית בקרב מורים ופרחי הוראה כאחד. במחקר זה נמצא כי הקונפליקט הקוגניטיבי הביא לשיפור בשתי קבוצות המשתלמים. המחקר מציג דרך התערבות (רצף משימות) שבאמצעותה ניתן לשפר את תפישת המורים על המשמעות של פתרון בעיות ועל תפקיד המתמטיקה, ומכאן תרומתו היישומית להוראה. הממצאים מצביעים שלאורך כל שלבי המחקר, ההתערבות הובילה לשינוי בתפישות המורים. מומלץ, אפוא, ליישמה בהשתלמויות מורי מתמטיקה ובהכשרת פרחי הוראה.

רשימת מקורות

Greer, B. (1997). Modeling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 293-307.

Lesh, R. & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: A model and modeling perspective on teaching, learning, and problem solving in mathematics education* (pp. 3-33). Mahwah, NJ: Lawrence Album.

Peled, I., & Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: Modelling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education,* 43(2), 307-315.

Peled, I. & Suzan, A. (2013). Designed to facilitate learning: Simple problems that run deep. In C. Margolinas (Ed.) *Proceedings of ICMI Study 22*, 633-640.

Richardson, V. (1990). Significant and worthwhile change in teaching practice. *Educational Researcher*, 19()7, 10-18.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2002). Everyday knowledge and mathematical modeling of school word problems. In K. Gravemeijer, R. Lehrer, B. van Oers, & L. Verschaffel (Eds.), *Symbolizing, modeling and tool use in mathematics education* (pp. 257-276). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.

העמקת ההבנה המתמטית בקרב תלמידי 5 יחידות באמצעות פתרון שיתופי של בעיות מאתגרות

צורית אליצור, מכללת הרצוג

מבוא

בשנים האחרונות שוקדים במשרד החינוך על גיבושן ויישומן של תכניות לימודים חדשות במתמטיקה לחטיבה העליונה. במאי 2010 אישרה ועדת המקצוע את המתווה הכללי של תכנית הלימודים החדשה, ובמסמך המפרט את המתווה מופיעים מטרות-העל והדגשים של התוכנית החדשה (לייקין וליבנה, 2015). בין היתר, מפורטות המטרות הבאות:

- יכולת התמודדות עם שאלות סבוכות על ידי שימוש בכלים ובשפה המתמטית לניתוחן ופתרונן.
- חשיבה מתמטית-לוגית הכוללת ביקורתיות ודיוק לצד בקרה על תהליך פתרון הבעיות.
- פיתוח מיומנויות של תקשורת מתמטית: קריאה וכתיבה של ביקורת על טיעון, הגנה על טיעון (ארגומנטציה), ותקשורת בעל-פה תוך ניהול שיח מתמטי.

בנוסף להצבת יעד של פיתוח מיומנויות חשיבה הנדרשות לפתרון בעיות מתמטיות, יש בשנים האחרונות גם קריאה לשילוב של עבודה קבוצתית־שיתופית כחלק מההתמודדות עם סוגיה זו. העבודה השיתופית מחייבת עבודת צוות, יכולת טיעון, ניהול, בקרה עצמית והדדית, ומיומנויות שיתוף. זאת בנוסף למיומנויות החשיבה הנדרשות בפתרון בעיות (מלמד וסלנט, 2009; OECD, 2010). באופן מחודד יותר הוגדרו הדברים ביעדים שהוצבו לקראת מבחני PISA ב-2015: "יכולת פתרון בעיות שיתופי היא היכולת של אדם לעסוק בצורה אפקטיבית בתהליך שבו שני שותפים או יותר מנסים לפתור בעיה באמצעות שיתוף החשיבה והמאמץ הנחוצים כדי למצוא פתרון, **וצירוף הידע שלהם, כישוריהם ומאמציהם** כדי להגיע אליו" (ראמ"ה 2013).

בספרות המחקר מוצגים האתגר והקשיים בקידום המיומנויות הנדרשות על מנת לפתור בעיות מתמטיות מורכבות (למשל, Schoenfeld, 1992). בסקירה (Lester & Cai, 2016) של שלושים שנות מחקר סביב פתרון בעיות, מציינים הכותבים את ההתקדמות וההבנה הרבה שהושגה במחקרים, ועם זאת מחקרים אלו היו מצומצמים בהיקפם; לפרקי זמן קצרים; ובנפרד מתוכנית הלימודים הרגילה. (משהו מעין 'תכנית העשרה').

במילים אחרות: מחקרים אלו לא בדקו אם אומנם אפשר להטמיע פתרון בעיות שיתופי כחלק אינטגרלי מתוכנית הלימודים המלאה והרגילה ,ולאורך כל השנה. כלומר, האם בכלל זה ניתן ליישום.

מחקר זה ביקש להיכנס לעובי הקורה, ולבדוק **האומנם וכיצד** יישום יעדים אלו בתוך תוכנית הלימודים הוא מעשי, תוך ביצוע אנליזה של התהליך וניתוחו לאור מספר פרמטרים שונים. בהרצאה אציג את המחקר ואראה יישום בשטח של שני היעדים שהציב משרד החינוך, קרי פיתוח היכולת לפתרון בעיות ופיתוח העבודה במסגרת שיתופית קבוצתית.

מטרות המחקר המוצג

א. להציע תכנית עבור החטיבה העליונה, שתעסוק בפתרון של בעיות מתמטיות במסגרת של קבוצה שיתופית, כחלק אינטגרלי של תכנית הלימודים הרגילה במתמטיקה, ושילובה בשגרת הלימודים לאורך שנה מלאה.

ייחודיותה של תכנית זו, שהיא מהווה ניסיון ראשון (עד כמה שידוע לי) להציע תכנית שהינה חלק אינטגראלי מלימודי מתמטיקה בחטיבה עליונה, שנבנתה בהלימה מוחלטת ליעדים ולתכנים של תכנית הלימודים, משתלבת בשגרת הלימודים, ועם זאת יש בה מרכיב חדשני של עיסוק ממושך בפתרון בעיות בלמידה שיתופית.

ב. לבדוק באותה פעילות מתמטית היבטים שונים, הקשורים הן לעבודה השיתופית־טיעונית על פתרון הבעיה, והן למיומנויות המתמטיות ומיומנות השימוש באסטרטגיות לפתרון בעיות.

המטרה היא להבין האם וכיצד האינטראקציה שמתפתחת בין הלומדים תורמת ליכולת להתמודד עם פתרון בעיות מתמטיות.

ייחודו וחידושו של מחקר זה הוא בשילוב קבוע של פתרון בעיות שיתופי, **כחלק אינטגרלי מתוכנית הלימודים הרגילה לבגרות במתמטיקה**. שילוב זה בוצע בשלוש כיתות י' ברמת 5 יח"ל, אחת לשבוע על פני כל שנת הלימודים, תוך הצמדות לתוכנית הלימודים מחד, ומאידך תוך התאמה למטרות וליעדים שקבע משרד החינוך למאה ה־21.

תיאור המחקר

שאלות המחקר

1. האם וכיצד אינטראקציה בין תלמידים בשיעורי מתמטיקה, המבוססת על פתרון בעיות שיתופי בקבוצות קטנות, מטפחת את היכולת לפתרון בעיות מתמטיות.
2. האם קיים קשר בין מיומנויות טיעוניות לבין יכולת פתרון בעיות.

מתודולוגיה

המתודולוגיה שעל פיה נבנה המחקר משלבת שיטות מחקר מעורבות (Mixed Methods). שיטת מחקר מעורבת מוגדרת כאיסוף נתונים, בו בזמן או ברצף, בשיטות איכותניות וכמותיות במחקר אחד (Creswell et al, 2003).

המתודה האיכותנית במחקר זה, הינה מחקר עיצוב איכותני (Collins, Joseph, Bielaczyc, 2004). מתודה זו התבטאה בניתוח עומק של תיעוד ותצפיות בשיעורים, ניתוח הפרוטוקולים שניהלו התלמידים בפתרון הבעיות, וניתוח משובים שניתנו על-ידי התלמידים בעל־פה ובכתב. המתודה הכמותית במחקר זה הייתה בניתוח מבחנים שניתנו לפני תכנית ההתערבות (pre-test) ולאחריה (post-test).

הדיון והסקת המסקנות בסוף המחקר התבססו על שילוב שתי השיטות וההפריה ההדדית שביניהן.

אוכלוסיית המחקר

תלמידי תיכון משלוש כיתות י' שלמדו ברמה גבוהה לקראת בגרות ברמת 5 יחידות לימוד. מספר התלמידים הכולל בשלוש הכיתות היה 46.

מערך המחקר

המחקר עקב לאורך תקופה של שנת לימודים אחת אחר התלמידים משלוש כיתות י', שאחת לשבוע עסקו בפתרון בעיות מתמטיות מורכבות. העיסוק בפתרון הבעיות נערך בכיתה, בקבוצות קטנות, בלמידה שיתופית בסביבה ממוחשבת דינאמית.

התכנים והעיסוק בפתרון בעיות היו חלק אינטגראלי ממערך השיעורים של הכיתה, ונבנו בהתאם לנושאים הנלמדים ממילא במתמטיקה בכיתה י'. התוכנית הופעלה בשעתיים מתוך שש השעות השבועיות המוקדשות ללימוד מתמטיקה בכיתה י'. הבעיות היו שונות מהבעיות 'הרגילות' שבספרי הלימוד – הן בניסוח והן ברמת הקושי הגבוהה יותר. העבודה על פתרון הבעיות תועדה, שוקלטה ונותחה בניתוח איכותני.

בנוסף, בתחילת שנת הלימודים ובסיומה נערכו מבחנים. התשובות למבחנים אלו נותחו ונבדקו גם מבחינת היכולת המתמטית וגם מבחינת המיומנות הטיעונית.

ממצאי המחקר

השוואת התוצאות בין מבחני ה־pre לבין מבחני ה־post הראתה כי התחולל שיפור מובהק ביכולות התלמידים, הן במיומנות המתמטית והן במיומנות הטיעונית, הן במבחנים הקבוצתיים והן באישיים.

הניתוח האיכותני הצביע על התפקיד המרכזי שיש לעבודה השיתופית בקבוצה קטנה על פיתוח המיומנות הטיעונית מחד והמתמטית מאידך, כמו גם פיתוח וטיפוח של גורמים תומכים כגון העלאת רמת המוטיבציה ובניית סביבת עבודה חיובית ונעימה.

נמצאה קורלציה מובהקת בין היכולת הטיעונית והיכולת המתמטית. הממצאים הראו ששיפור היכולת הטיעונית משפיע על שיפור היכולת המתמטית, ושיפור היכולת המתמטית משפיע על היכולת הטיעונית, וקיימים ביניהם תחומי השקה והפרייה הדדיים. מכאן המסקנה כי רצוי לשלב בין פתרון בעיות לבין למידה שיתופית־טיעונית.

תמצית המסקנות שעלו במחקר היא ששילוב בין פתרון בעיות מתמטיות מורכבות, למידה שיתופית־טיעונית, והפעלת התוכנית כחלק משגרת הלימודים לאורך זמן ממושך – התברר כשילוב סינרגטי שהביא ל:

א. פיתוח המיומנויות הטיעוניות והמתמטיות.

ב. פיתוח היכולת לפתור בעיות מתמטיות מורכבות.

ג. הגברת המוטיבציה ללמידת מתמטיקה.

רשימת מקורות

לייקין, ר', ליבנה, ר' (2015). 'תכנית הלימודים במתמטיקה לחט"ע – מבנה ועקרונות'. **על"ה** 51. (5-13).

מלמד, ע', סלנט, ע' (2009). **סקירת ספרות – המיומנויות הנדרשות מבוגרי המאה ה -21**, מכון מופ"ת.

ראמ"ה (2013). פיזה 2015. **טיוטת המסגרת המושגית של פתרון בעיות שיתופי.** http://meyda.education.gov.il/files/Rama/PISA_2015_CPS_summary.pdf

Lester, F. K., & Cai, J. (2016). Can mathematical problem solving be taught? Preliminary answers from 30 years of research. In P. Felmer, E., Pehkonen, & J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems. Advances and new perspectives* (pp. 117–136). Switzerland: Springer.

OECD (2010) PISA 2012 Field Trial Problem Solving Framework. Accessed 2011-08-29 http://www.oecd.org/dataoecd/8/42/46962005.pdf

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan. 334-371

תפקידם של כלים מטה־קוגניטיביים התומכים במשוב אישי מקוון בפתרון בעיות מתמטיות

אמל קעדאן, אוניברסיטת חיפה

רקע תיאורטי קצר

התפתחות הטכנולוגיה בשנים האחרונות אפשרה לאסוף, לשמור, לנתח ולעקוב אחרי כמות גדולה של נתונים, דבר אשר מחזק ומבליט את תפקידו של המשוב הממוחשב כחלק מ"הערכה מעצבת ממוחשבת".

משוב נתפס כמרכיב מרכזי המסייע ללמידה (Black & Wiliam, 2009) ולהכוונה עצמית של הלמידה (Bokhove & Drijvers, 2012), כך ש"פעולת ההערכה יכולה לעזור ללמידה אם היא מספקת מידע בו ניתן להשתמש כמשוב על ידי המורים והתלמידים" (Hattie & Timperley, 2007). מורים יכולים לעזור לתלמידים להעריך את ביצועיהם באופן עצמאי על ידי איסוף מידע על ביצועיהם במשימה והעברת מידע זה לתלמידים כמשוב (Shute, 2008).

משוב אמור לעזור לתלמידים לראות את נקודות החוזק והנקודות טעונות שיפור שנמצאות בעבודתם, ולספק להם את האמצעים לחשוב שוב על אופן החשיבה שלהם ולתת להם דרכים שיעזרו להם לשנות ולבנות את גישתם בעבודה עתידית (Sadler, 1989). יחד עם זאת, תהליך זה אינו קורה אם התלמיד לא מצליח להיות מודע למשוב (Graesser, McNamara, & VanLehn, 2005). שוטי (Shute, 2008) ציינה כי "משוב יכול לקדם למידה אם הוא נתפס בתודעה" (עמוד 172). במלים אחרות, הבנת המשוב כשלעצמה אינה תומכת בלמידה או מובילה לשיפור אלא אם היא משתקפת באופן מטה־קוגניטיבי. בסקירות ספרות על משוב והשפעתו על הישגים, הרבה חוקרים הגיעו למסקנה כי משוב ממלא תפקיד משמעותי בתהליך המטה־קוגניטיבי (Kapa, 2001).

סביבת המרא"ה־STEP (http://step.haifa.ac.il) היא סביבה שמאפשרת למורים לעצב משימות מעוררות דוגמאות (EETs – Example-Eliciting Tasks) אשר מנוסחות כך שהתשובה להן תייצג את דימוי המושג והידע של הגדרת המושג של המשיב. הסביבה מספקת הערכה ממוחשבת אוטומטית ועשירה, כמתואר על ידי Olsher, Yerushalmy & Chazan (2016). המשוב שמספקת STEP כולל ניתוח מתמטי ומאפיינים דידקטיים, בהתבסס על הגשות התלמידים. המשוב מעריך אם הדוגמה אשר הגיש התלמיד תואמת את דרישות המשימה, והוא גם בוחן את "המאפיינים" המתמטיים של הדוגמה שאינם קשורים בהכרח לנכונות התשובה.

מידע מתודולוגי (שאלות המחקר, המשתתפים ,כלי המחקר, ואופן ניתוח הנתונים)

אין ספק שערכו של המשוב ללומד תלוי בהתייחסות וברפלקציה של התלמיד למשוב שקיבל. לכן המחקר בא לחקור את האתגר הייחודי שעומד בפני משוב מקוון מפורט בתמיכה ושיפור ביצועי התלמידים וכישוריהם המטה־קוגניטיביים בעת פתרון משימות עשירות. המחקר יתמקד במשוב הנתמך על ידי כלים מטה־קוגניטיביים וניתן באופן אוטומטי ומותאם אישית, ועוקב אחרי הטמעתו בפתרון משימות דומות. ולכן שאלת המחקר היא: כיצד משוב מקוון, שנתמך על ידי כלים מטה־

קוגניטיביים, משפיע על ביצועי התלמיד וכישוריהם המטה־קוגניטיביים כאשר הם פותרים משימות עשירות?

בניסוי גישוש ראשון עוצבו כלים שמנתחים: א) תדירות הטעויות והתפיסות המוטעות, ב) הכישורים המטה־קוגניטיביים אשר משתקפים בעבודת התלמיד, וג) העושר של מרחב הדוגמה האישי של התלמיד. הממצאים של ניסוי הגישוש הראו כי היה שיפור בנכונות, העשרה במרחב הדוגמאות אצל התלמידים וגיוון בשיטות העבודה שלהם. זהו רק חלק מתוך מחקר רחב ורק בו אתמקד בכנס.

מערך המחקר

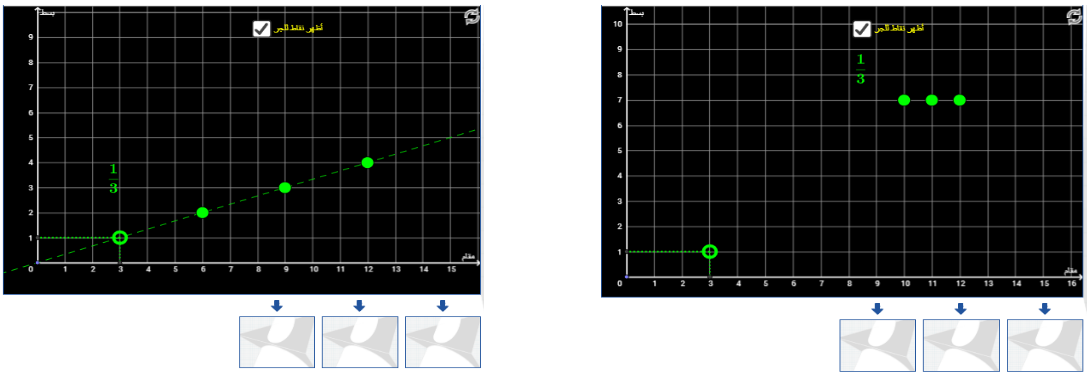
משתתפי המחקר הם 30 תלמידים בגילאים 11 עד 13 שנים הלומדים את נושא השברים על פי תוכנית הלימודים הרגילה של משרד החינוך. שיטת ההוראה בכיתות של משתתפי המחקר תתבסס על למידה דרך חקר (inquiry learning) (Maaß & Artigue, 2013, p. 780). התלמידים יקבלו 4 פעילויות הערכה בנושא שברים באמצעות STEP, הזמן שמוקצה לכל פעילות הוא 45 דקות. כל פעילות כוללת 4 משימות EET: משימת אבחון, שתי משימות אשר בהן המשוב מלווה בכלים מטה־קוגניטיביים, משימה מסכמת הדומה למשימה הראשונה ועוד משימה שתוכננה כשאלון מטה־קוגניטיבי.

אני אציג כאן חלק מהמשימות מהפעילות הראשונה של המחקר בנושא "שברים שקולים":

משימת אבחון (**איור 1**, ימין): התלמידים יתבקשו לבחור שבר על ידי גרירת נקודה במערכת הקרטיזית. אחר כך הם יתבקשו לגרור עוד שלושה נקודות כדי לייצג שברים שקולים לשבר שנבחר קודם. הדרישה היא לבנות שלוש דוגמאות שונות לשברים שקולים. כל דוגמה שהתלמיד בוחר מאוחסנת באחד הריבועים (מסכים) למטה על ידי לחיצה על החץ הכחול עד שהתלמיד מגיש את שלוש ההגשות שלו. משימה זו נועדה לאבחן את הבנת התלמידים בייצוג שברים שקולים. כאשר כל השברים שווים לשבר שבחר התלמיד, מופיע באופן אוטומטי קו ישר אשר מייצג "מחלקת שקילות" של כל השברים השווים לשבר שנבחר (**איור 1**, שמאל). קו זה עובר דרך הנקודה שמייצגת השבר שנבחר ונקודת המוצא. קו ישר זה יהווה כלי עזר במשימות שבאות אחרי.

איור 1

המשימה הראשונה בפעילות "שברים שקולים" (מימין) וקו שקילות שמופיע (משמאל)



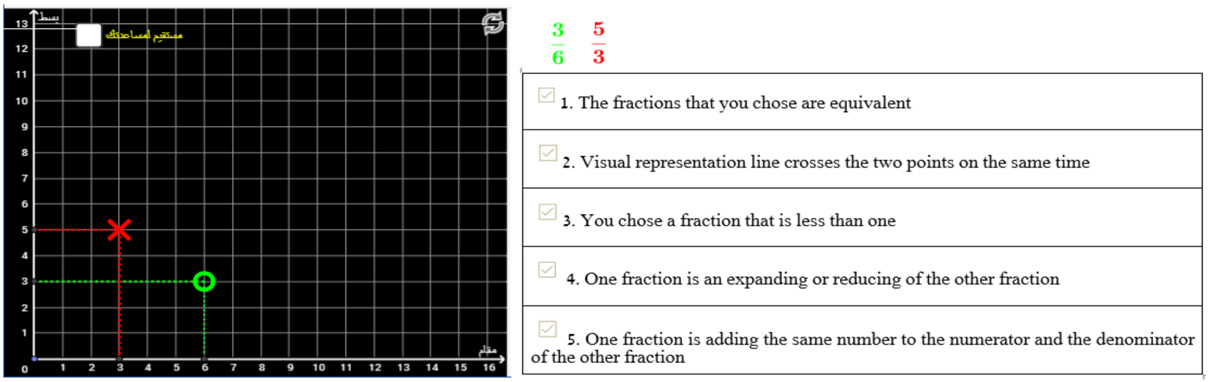
לאחר כל משימה התלמיד יקבל משוב אישי מפורט אוטומטי. המשוב מכיל ניתוח מתמטי של מאפייני ההגשה שכולל משוב על נכונות התשובה או אם התשובה עונה על הנדרש מהמשימה (למשל, *השברים שבחרת שקולים*), ניתוח של מאפיינים מתמטיים שמתייחסות לייצוג הוויזואלי של

הדוגמה (למשל, *השברים שבחרת נמצאים על אותו קו ישר או באותה מחלקת שקילות*), ניתוח של מאפיינים מתמטיים שקשורים לבחירת התלמיד לשבר שהוא החליט להגיש כדוגמה (למשל, *בחרת שבר שהוא קטן מאחד* או *בחרת שבר שהמונה שלו שווה לאחד*), ומשוב אשר מתייחס לשגיאות נפוצות ולתפיסות מוטעות (למשל, *לשברים שבחרת יש מונים או מכנים שווים*). כל אלמנט במשוב המפורט יסומן באופן אוטומטי על ידי המערכת בצבע צהוב אם הוא קיים בהגשת התלמיד.

המשימה השנייה והשלישית (**איור 2**) יכללו כלים מטה־קוגניטיביים אשר תומכים במשוב שקיבל התלמיד. הכלים המטה־קוגניטיביים נועדו לתמוך בהבנת המשוב ויישומו במשימות, הם אמורים לאפשר לתלמידים להסתכל על המשוב ולנסות להבין כיצד הוא יכול לעזור לו במשימות דומות. שתי המשימות דורשות מהתלמיד לבחור שני שברים שקולים כאשר המשימות כוללות רשימת ביקורת כחלק מהיישומון של חמישה מאפיינים מהמשוב שתוכנן למשימה הקודמת. הרשימה כוללת: נכונות ההגשה או אם היא עונה על הדרישה של המשימה, ייצוג ויזואלי של הנכונות, תפישות שגויות או טעויות נפוצות, ושתי תפישות לגבי בחירת השבר. כאשר במשימה השנייה התלמיד נדרש להגיש דוגמאות הכוללות לפחות שלושה מאפיינים ולהשתקף בבחירתו על ידי בחירת המאפיינים שלדעתו קיימים בתשובתו על ידי סימון V בתיבת הסימון. התלמיד יכול לחזור ולשנות את הדוגמאות שהוא בחר לפני שהוא מגיש את שלוש ההגשות האחרונות. במשימה השלישית, ההגשה מחייבת לשים לב לסתירת מאפיינים שהופיעו במשוב, ע"י הגשת דוגמאות הכוללות כמה שפחות מאפיינים מהרשימה.

איור 2

המשימה השנייה והשלישית מפעילות שברים שקולים.



המשימה החמישית, היא שאלון מטה־קוגניטיבי, בן 5 שאלות רב־ברירה, שהתלמידים יתבקשו למלא לאחר סיום של כל הפעילות והוא יכלול את האופן בו הם מתכננים, מעריכים ומווסתים את הכישורים המטה־קוגניטיביים הקשורים לשימוש במשוב הממוחשב (למשל, *משוב אשר גרם לי לחשוב שוב על התשובות שלי* או *משוב אשר גרם לי לשנות את תשובותיי*). השאלון יוערך באופן אוטומטי. כמו כן, התלמידים יוכלו להסביר את תשובותיהם אם הם רוצים בכך. ואז ההסבר יוערך באופן ידני על ידי החוקרה ב.

איור 3 מופיע השאלון.

המחקר ישלב שיטות מחקר איכותניות וכמותיות, תוך שימוש בניתוח נתונים אוטומטי ואנושי. את השינוי בביצועי התלמידים ייבדק במבחן t כהשוואה בין הממוצעים של משימת האבחון והמשימה המסכמת, הנתונים יתבססו על ניתוח אוטומטי של הגשות התלמידים אשר מספקת STEP. יהיה ניתוח כמותי לתשובות התלמידים לשאלונים אשר ייבדק במבחן פירסון. נערוך תצפיות מבוססות

משימות וראיונות שיוקלטו מעבודתם של חמישה תלמידים נבחרים בעת העבודה על המשימות, התלמידים יתבקש לדבר בקול רם על בחירותיהם, על השימוש במשוב ועל ההסברים שיעשו בזמן שהם עובדים על המשימות. הממצאים הכמותיים ישקפו את ההתקדמות בביצועי התלמידים ממשימת האבחון למשימה המסכמת והממצאים האיכותניים יבהירו לנו את התהליך שגרם לשינוי.

איור 3

השאלון שמקבלים התלמידים לאחר הפעילות

Metacognitive skills / The five characteristics	This feedback helped me to choose or check my answers	This feedback allowed me to diagnose a feature that characterized my answers	This feedback made me change or rethink about my answers	This feedback made me change the way I fined equivalent fractions	This feedback seen unnecessary
1. The fractions that you chose are equivalent	☑	☑	☑	☑	☑
2. Visual representation line crosses the two points on the same time	☑	☑	☑	☑	☑
3. You chose a fraction that is less than one	☑	☑	☑	☑	☑
4. One fraction is an expanding or reducing of the other fraction	☑	☑	☑	☑	☑
5. One fraction is adding the same number to the numerator and the denominator of the other fraction	☑	☑	☑	☑	☑

תוצאות המחקר עשויות להביא לאוטומציה שתוריד חלק מעומס התהליך של הערכה מעצבת, אשר נעשית בדרך כלל על ידי המורה; הן גם עשויות להציע כיצד לעצב משוב אישי המשפר את ביצועי התלמידים ואת הכישורים המטה-קוגניטיביים שלהם בפתרון בעיות עשירות.

הצעה ל־2-3 סוגיות רלוונטיות לדיון במליאה

הצעה ראשונה לסוגיה לדיון במליאה היא עיצוב הפעילות והמשוב אשר מאפשרת הסביבה הטכנולוגית. הדיון יעשה לאור חשיפה של המשתתפים לעיצוב של אחת הפעילויות והמשוב האישי אשר מקבל התלמיד לאחר כל משימה.

הצעה שנייה לסוגיה לדיון במליאה היא הכישורים המטה־קוגניטיביים אשר יכולים להיות מושפעים מעיצוב הפעילות והמשוב שמאפשרת הסביבה. הדיון יעשה לאחר התנסות של חברי המליאה בשתי משימות אשר כוללות משוב שנתמך על ידי כלים מטה־קוגניטיביים.

הערה : מחקר זה הינו חלק מעבודת דוקטורט באוניברסיטת חיפה, החוג לחינוך מתמטי. מנחה: פרופ ' מיכל ירושלמי

רשימת מקורות

Black, P., & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. Educational Assessment, Evaluation and Accountability (formerly: Journal of Personnel Evaluation in Education), 21(1), 5.

Bokhove, C., & Drijvers, P. (2012). Effects of a digital intervention on the development of algebraic expertise. *Computers & Education*, *58*(1), 197-208.

Graesser, A. C., McNamara, D. S., & VanLehn, K. (2005). Scaffolding deep comprehension strategies through Point & Query, AutoTutor, and iSTART. *Educational psychologist*, *40*(4), 225-234.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of educational research*, *77*(1), 81-112.

Kapa, E. (2001). A metacognitive support during the process of problem solving in a computerized environment. *Educational studies in mathematics*, *47*(3), 317-336.

Maaß, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM*, *45*(6), 779-795.

Olsher, S., Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2016). How might the use of technology in formative assessment support changes in mathematics teaching? *For the Learning of Mathematics*, *36*(3), 11-18.

Sadler, D. R. (1989). Formative assessment and the design of instructional systems. *Instructional science*, *18*(2), 119-144.

Shute, V. J. (2008). Focus on formative feedback. *Review of educational research*, *78*(1), 153-189.

השוואת פרקטיקות הוראה של מורה למתמטיקה בעל־יסודי המלמד בשלוש רמות לימוד שונות 3-4-5 יח"ל

רביע דלאשה[1], תקוה עובדיה[1,2]

[1] אורנים – המכללה האקדמית לחינוך; [2] מכללה ירושלים

מבוא

מורים המלמדים בבתי ספר במשך תקופות ארוכות מתמודדים לרוב עם שאלות הנוגעות לאופי ההוראה שלהם. שאלות כמו: האם שיטת ההוראה נמצאת בהלימה לאוכלוסיית הלומדים? איך אפשר לשפר את דרכי ההוראה? מהם הגורמים להצלחה או כישלון בלמידת מתמטיקה, וכיצד המורה יכול לקדם הצלחות יותר מכשלונות?

שאלות כאלה, הובילו אותי, כמורה למתמטיקה בבית ספר תיכון, להפוך למורה-חוקר לגבי דרכי הוראתי. המטרה העיקרית שלי במחקר הנוכחי היתה: לאפיין את פרקטיקות ההוראה שלי בהיותי מלמד תלמידי תיכון, בשלוש כיתות שונות, רמת לימוד 3-4-5 יח"ל. לצד ידיעותיי על דרכי הוראה וניסיוני ביישומם בכיתה, ביצעתי תיעוד של שיעוריי על מנת לחקור את הפעולות שאני מבצע בתהליך ההוראה.

רקע תיאורטי

הוראה איכותית היא הוראה המשלבת מרכיבים של בניית ידע אישי, בניית ידע באמצעות חברות ובניית ידע באמצעות תרבות (זוהר & בושריאן, 2020). לשם ביצוע הוראה איכותית, מורים מיישמים פרקטיקות הוראה שאימצו לעצמם, מניסיונם כתלמידים או מעבודתם בהוראה. פרקטיקות הוראה, זהו מונח הכולל בתוכו משמעויות רבות לפי למפרט (Lampert, 2010). פרקטיקה היא מה שאנשים עושים בפועל ולא מה שהם חושבים על או יודעים על, לכן היא המילה המנוגדת לתיאוריה. משמעות אחרת למושג נתפשת כאשר רואים בהוראה אוסף של פרקטיקות או שגרות הוראתיות החוזרות על עצמן, ואז ההתייחסות לפרקטיקות היא התייחסות לפעולות הוראה שהמורה מנהל בכיתתו לצורך קידום הלמידה, ודווקא מתוך כוונה מחשבה ואמונות. אלה יכולות להיות פרקטיקות שהן שיטות כגון: הוראת חקר, למידת עמיתים, למידה בזוג, למידה דיאלוגית וכדומה. לעומתן יש פרקטיקות יותר ממוקדות לתהליך ההוראה שיכולות להשזר בפרקטיקות "הגדולות", כגון: ניהול הסברים והדגמות, הובלת תהליכי פתרון בעיות בכיתה, הובלת וניהול דיונים ועוד (Capar, &Tarim, 2015; Loyens, & Rikers, 2011; Vickrey at el, 2015).

במקביל לפרקטיקות שמורה מיישם בהוראתו, נמצאים התלמידים המגוונים שהם בעלי מאפייני למידה שונים. לפי מחקרים, הן תלמידים חלשים במתמטיקה (עובדיה, 2016, 2018) והן תלמידים מומחים במתמטיקה (קשת, 2016; Nystrom, 2016) זקוקים להוראה מותאמת באמצעות עקרונות למידה ייחודים.

הנחת מוצא של מחקר זה היא שמורה שמלמד בכיתות שונות ונדרש להוראה של תוכנית שונה בכלים שונים, יישם פרקטיקות שונות המותאמות לתלמידיו, שאלת המחקר מתמקדת באיפיונן.

שיטת המחקר

המחקר הנוכחי התבסס על חקר־עצמי של מורה למתמטיקה המלמד בבית ספר תיכון מהמגזר הערבי, המכין תלמידי תיכון לבחינות בגרות במתמטיקה בכל הרמות. לצורך המחקר, הוסרטו שנים־עשר שיעורים באורך תשעים דקות, וזאת לאחר שהתקבלו אישורים לעריכת המחקר. הכיתות שהשתתפו בלמידה בזמן עריכת המחקר, הן י, י"א, וי"ב הלומדות לרמות 3-4-5 יח"ל.

ניתוח השיעורים נעשה בכמה שלבים: בשלב ההתחלתי כתיבת רפלקציה על ההוראה, בשלב השני תמלול של כל שיעור במקביל לצפייה בסרט הקשור לאותו שיעור ורשימת תובנות מהצפייה. בשלב השלישי ניתוח כל שיעור לפי קודים, ובשלב האחרון קידוד כל השיעורים ומציאת קטגוריות החוזרות על עצמן והבנת היחסים בין הקטגוריות.

ממצאים

ממצאי המחקר מצביעים על הבדלים בניהול פרקטיקות ההוראה, כלומר המורה השתמש באופן חלקי באותן פרקטיקות בשלוש הרמות, לכל רמה היו פרקטיקות שכיחות יותר לה, בכל רמה היישום התבצע באופן שונה ולרוב באופן מותאם לרמת הלימוד.

נמצאו שתי פרקטיקות מרכזיות: שיטת המסירה ושיטת ההבניה (קונסטרוקטיביזם). לכל פרקטיקה היו תת פרקטיקות שיושמו כמו: הקניית הסברים והדגמות (שיטת המסירה) לעומת ניהול דיונים באמצעות שאלות, ניהול דיונים באמצעות תשובות, שימוש בחקר של חוקים ונוסחאות (הבניה) ועוד.

תתי הפרקטיקות יושמו באופן שונה בכל רמת לימוד. למשל, פרקטיקות להגדרת מושג מתמטי, או הסבר מושג מתמטי והקשריו בוצעו בדרכי הוראה שונות בכל רמה. כך שברמות הגבוהות בשיטת המסירה ההסברים היו בעיקר פנים־מתמטיים ומבוססים על מערכות מופשטות, וברמה הנמוכה ההסברים היו חוץ־מתמטיים ומבוססי המחשה. בשיטת ההבניה רק ברמות הגבוהות הגדרה והסבר של מושג נבעו מחקר אירוע מתמטי שהוביל להגדרה.

ברמה הנמוכה, הדגמת מושג מתמטי והקשריו התבצעו באמצעות דוגמאות אמיתיות מעולם התלמיד, לעומת הדגמות והקשרים מתחומי המדעים בכיתות של ארבע וחמש יחידות לימוד.

פתרון בדרך שיטתית אחת ללא בקרת הפתרון מאפיינת הוראה בכיתה ברמה הנמוכה. פתרון בעיה בכמה דרכים ובקרת פתרון נמצאה בהוראה לתלמידי ארבע וחמש יחידות לימוד.

בנוסף, המחקר חשף פרקטיקות הוראה שביצע המורה בכיתות ושלא התאימו ללומדים ברמות השונות.

דיון ומסקנות

יש הטוענים כי פרקטיקות ההוראה בהן נוקט המורה הן בעלות ההשפעה הגדולה ביותר על הרגלי הלמידה והישגי התלמיד (Hightower et al., 2011). חוקרים טוענים שקשיים בפתרון בעיות מתמטיות שמגלים התלמידים אינם בהכרח תוצאה של חוסר הבנה אלא של הוראה באמצעות פרקטיקה לא מתאימה לאימון בפתרון בעיות. שתי טענות אלה מחזקות את המוטיבציה למחקר. הממצאים מצביעים על הפרקטיקות שהיו יעילות לעומת אחרות שלא התאימו ללומדים. הממצאים מלמדים כי יש להכשיר מורים להוראה ברמות שונות באמצעות הכשרה מפורשת של הפרקטיקות שעליהם ליישם בכיתות הלימוד מגוונות התלמידים.

רשימת מקורות

זוהר, ע', & בושריאן, ע'. (2020). התאמת תוכניות הלימודים וחומרי הלימוד למאה ה־21 — סיכום עבודתה של ועדת המומחים, תמונת מצב והמלצות. ירושלים: יוזמה — מרכז לידע ולמחקר בחינוך, האקדמיה הלאומית.

עובדיה, ת' (2018). עקרונות התערבות לקידום תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי, 6*, 53-65.

עובדיה, ת' (2016). קידום פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות באמצעות אסטרטגיה היוריסטית: "בניית קשרי דמיון בין בעיות". *כעת – כתב עת לענייני חינוך חברה ומורשת, 2*, 91-122.

קשת, ג' (14 04 2016). *מודל מייקר להתאמת ההוראה למחוננים.* אוחזר מהמינהל הפדגוגי: https://giftedisrael.wordpress.com/2016/04/14/%D7%9E%D7%95%D7%93%D7%9C-%D7%9E%D7%99%D7%99%D7%A7%D7%A8-%D7%9C%D7%94%D7%95%D7%A8%D7%90%D7%94-%D7%93%D7%99%D7%A4%D7%A8%D7%A0%D7%A6%D7%99%D7%90%D7%9C%D7%99%D7%AA

Capar, G., & Tarim, K. (2015). Efficacy of the Cooperative Learning Method on Mathematics Achievement and Attitude: A Meta-Analysis Research. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *15*(2), 553-559.

Hightower, A. M., Delgado, R. C., Lloyd, S. C., Wittenstein, R., Sellers, K., & Swanson, C. B. (2011). Improving student learning by supporting quality teaching. *Retrieved on*, *3*, 14.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean?. *Journal of teacher education*, *61*(1-2), 21-34.

Loyens, S. M., & Rikers, R. M. J. P. (2011). Instruction based on inquiry. *Handbook of research on learning and instruction*, 361-381.

Nyström, P. (2016). 6. Characteristics of high-performing students in mathematics. *Northern Lights on PISA and TALIS*, 161.

Vickrey, T., Rosploch, K., Rahmanian, R., Pilarz, M., & Stains, M. (2015). based implementation of peer instruction: A literature review. *CBE—Life Sciences Education*, *14*(1), es3.

הקשר בין ייחוס סיבתיות להצלחה וכישלון לבין תמיכה והישגים בקרב תלמידי שלוש יחידות במתמטיקה

אמאל שריף-רסלאן[1], ניזאר ג'רייס[1,2]

[1] המכללה האקדמית הערבית לחינוך; [2] בי"ס כרמל חיפה

מבוא

בשנים האחרונות נראית עלייה בשיעור הנבחנים בבחינת בגרות במתמטיקה ברמה של 3 יחידות לימוד. שיעור התלמידים שנבחנו ברמה זו גדל מ־44% בתשע"א ל־56% בתשע"ה בקרב דוברי עברית, ומ־37% בתשע"א ל־48% בתשע"ה בקרב דוברי ערבית (ליפשטט וברצלבסקי, 2017). בשנת 2018 (יום עיון במתמטיקה מחוז צפון מיום 16.10.2018) דווח כי במגזר הערבי במחוז צפון 4331 תלמידים ניגשו לבגרות 3 יחידות בזמן שרק 1287 ניגשו ל 5 יחידות ו 1768 תלמידים ניגשו ל 4 יחידות. יתרה מזו, בשנים האחרונות שיעור התלמידים דוברי ערבית, המצליחים בבגרות מתמטיקה ברמת 3 יחידות לימוד קטן. יש להדגיש כי במבחנים הבינלאומיים PISA ו־TIMSS קיים פער בהישגים במתמטיקה בין דוברי עברית ודוברי ערבית העומד על 111 נקודות ו־73 נקודות בהתאמה (Rasslan & Sharif-Rasslan, 2018). נתונים אלה היו המניע למחקר הנוכחי.

אחד ההסברים לתופעה לעיל קשור למושג הייחוס. פסיכולוגים השתמשו במושג הייחוס והגדירו אותו כאשר האדם תופס מאורעות כנגרמים על ידי סיבות אשר חלקן ממוקדות בו עצמו וחלקן מחוצה לו – בסביבתו (Weiner, 2008). בן טוב (2006) טען שניתן לומר שתאוריית הייחוס בודקת את החוקים בהם משתמש הפרט בניסיונו להסיק על סיבתיות של התנהגות נצפית – הסבר התופעה (הגורמים להצלחה או כשלון במטרה מסויימת) וניבוי התוצאות. כמו כן, בן טוב (שם) טען כי תאוריות הייחוס מבדילות בין סיבות פנימיות לחיצוניות. סיבה פנימית היא סיבה הקשורה לאישיות האדם או להתנהגותו. דוגמה: תלמיד נכשל בבחינה במתמטיקה כי אינו מוכשר בתחום זה. סיבה חיצונית מקורה מחוץ לאדם התלמיד נכשל במבחן כי המורה החמיר בדרישותיו.

ויינר (Weiner, 2010) התייחס לשלושה ממדים המאפיינים סיבות שתלמידים מייחסים לתוצאות לימודיות: 1. ממד פנימי/חיצוני – האם הסיבה נעוצה באדם עצמו (כגון: מאמץ או יכולת) או מחוצה לו (למשל, מורה או עזרה בבית). 2. ממד קבוע/משתנה – האם התוצאות מיוחסות לגורמים קבועים (למשל, קושי תפקיד או יכולת) או לגורמים משתנים (למשל, מאמץ, מזל או מצב רוח), הממד הזה משפיע על הצפיות לעתיד. 3. ממד השליטה – האם התלמידים מייחסים את התוצאות לגורמים שניתנים לשליטה (כגון: מאמץ, הכנה) או לגורמים שאינם ניתנים לשליטה (כגון: יכולת או מזל) למשל, כשמדברים על גורמים פנימיים ולא יציבים, כמו מצב רוח, עייפות או מאמץ זמני. ויינר (Weiner, 2008) מקשר את תורת הייחוס עם תהליכי חשיבה, הרגשה ועשיה.

מצד שני, הספרות המחקרית בנושא הישגים אקדמיים של תלמידים רואה את סביבת הבית והתמיכה הניתנת לתלמידים על ידי ההורים ובני משפחה אחרים כגורם משמעותי המשפיע על רמת ההישגים האקדמיים. התמיכה הרגשית של ההורים היא בעלת חשיבות רבה מבחינת קידום הישגים אקדמיים של הילדים, כאשר נמצא כי ככל שעולה רמת ההשכלה והמודעות של ההורים, כן רמת התמיכה

הרגשית עולה (Chohan & Khan, 2010). מחקרים שונים (Dinkelmann & Buff, 2016) דווחו כי תמיכה של הורים, מורים וחברים משפיעה על הישגי התלמידים במתמטיקה.

ומכאן מטרת המחקר הנוכחי היא לבדוק את הקשר בין הייחוס להצלחה וכישלון וגם את התמיכה שמקבל התלמיד ובין הישגי התלמיד הלומד מתמטיקה ברמת 3 יחידות לימוד במתמטיקה.

שאלות המחקר

שאלה 1: האם קיים קשר בין סוג הייחוס להצלחה וכישלון לבין התמיכה שמקבל התלמיד בקרב תלמידי שלוש יחידות מתמטיקה דוברי ערבית?

1.1. האם קיים קשר בין ממד **חיצוני** להצלחה וכישלון לבין התמיכה שמקבל התלמיד?

1.2. האם קיים קשר בין ממד **פנימי** להצלחה וכישלון לבין התמיכה שמקבל התלמיד?

שאלה 2: האם קיים קשר בין סוג הייחוס להצלחה וכישלון לבין הישגים במתמטיקה בקרב תלמידי שלוש יחידות מתמטיקה דוברי ערבית?

2.1. האם קיים קשר בין ממד **חיצוני** להצלחה וכישלון לבין הישגיו במתמטיקה של התלמיד?

2.2. האם קיים קשר בין ממד **פנימי** להצלחה וכישלון לבין הישגיו במתמטיקה של התלמיד?

שאלה 3: האם יש קשר בין התמיכה שמקבל התלמיד לבין הישגיו במתמטיקה בקרב תלמידי שלוש יחידות מתמטיקה דוברי ערבית?

3.1. האם קיים קשר בין **תמיכת תוכן** שמקבל התלמיד לבין הישגיו במתמטיקה?

3.2. האם קיים קשר בין **תמיכה רגשית** שמקבל התלמיד לבין הישגיו במתמטיקה?

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי התבצע באמצעות מתודולוגיות כמותניות.

משתתפי המחקר: במחקר השתתפו 129 תלמידי כיתות י' וי"א, הלומדים בארבעה בתי ספר שונים, במגזר הערבי, בצפון הארץ. גילאי התלמידים: 56% בני 16, 29% בני 15 ו־15% בני 17.

כלי המחקר: שני שאלונים שימשו אותנו.

<u>שאלון ראשוני</u>: מטרתו הייתה הסקת וקביעת גורמים לכישלון ולהצלחת תלמידי מתמטיקה ברמת 3 יחידות לימוד, הקשורים לייחוס פנימי וחיצוני וגם הקשורים לתמיכה הרגשית, ותמיכת התוכן. שאלון זה כלל שני חלקים. בחלק הראשון של השאלון, נאספים הנתונים גיל, מין וממוצע ציונים במתמטיקה. בחלק השני, מתבקש המשתתף למנות שלושה גורמים לכישלון במתמטיקה. כמו כן, המשתתף מתבקש לציין האם הוא מקבל עזרה, עידוד או תמיכה במתמטיקה, ואם כן, מה מקורה.

<u>שאלון שני</u> בדק את משתני המחקר וכלל 24 היגדים. המשתתפים התבקשו לציין את מידת הסכמתם עם כל היגד על פני סולם ליקרט בן 4 קטגוריות, כאשר 1 מציין אי הסכמה ו-4 מציין הסכמה מלאה. ההיגדים בשאלון חולקו לקטגוריות על ידי מומחה בחינוך מתמטי לפי סוג הממד לייחוס ההצלחה וכישלון (חיצוני ופנימי, מהימנות 0.71 ו- 0.65 בהתאמה) ולפי סוג התמיכה שמקבל התלמיד (תמיכה בתוכן הנלמד או תמיכה רגשית, מהימנות 0.625 ו- 0.802 בהתאמה).

ממצאים

השערת המחקר הראשונה הייתה כי יימצא קשר חיובי בין הייחוס הפנימי לבין התמיכה שמקבל התלמיד וקשר שלילי בין הייחוס החיצוני והתמיכה. לבדיקת השערת המחקר בוצע מבחן למתאם פירסון בין סוג הייחוס (חיצוני\פנימי) לבין תמיכה. ממצאי המחקר מראים כי: קיים קשר חיובי חלש, מובהק ברמה נמוכה בין תמיכה לבין ייחוס פנימי להצלחה וכישלון (r_p =.190, p<.05), אולם הקשר הסטטיסטי בין תמיכה לבין ייחוס חיצוני הופרך (r_p =-.025, p>.05). כלומר, ניתן לומר שקיים קשר חיובי בין תמיכה לייחוס פנימי של הצלחות וכישלונות, אך לא ניתן לומר שקיים קשר כלשהו בין תמיכה לייחוס חיצוני של הצלחות וכישלונות.

השערת המחקר השנייה הייתה כי יימצא קשר בין ייחוס התלמיד להצלחה וכישלון ובין הישגיו במתמטיקה, כך שככל שהייחוס יטה יותר לכיוון הפנימי כך יעלו הישגיו. לבדיקת השערת המחקר בוצע מבחן למתאם פירסון בין סוג הייחוס (חיצוני\פנימי) לבין הישגיהם של הנבדקים. ממצאי המחקר מעלים כי לא נמצא קשר מובהק בין הישגיהם של התלמידים לבין ייחוס התלמידים להצלחה וכישלון. לא זה הפנימי (r_p =-.042, p>.05) וגם לא זה החיצוני (r_p =-.090, p>.05).

השערת המחקר השלישית הייתה כי יימצא קשר חיובי בין תמיכה בתלמיד (על סוגיה השונים) ובין הישגיו במתמטיקה, כך שככל שהתמיכה תעלה יעלו הישגיו. בוצע מבחן למתאם פירסון בין סוג התמיכה (תוכן\רגשית) לבין הישגיהם של הנבדקים. הממצאים מראים כי קיים קשר חיובי בין תמיכה רגשית לבין הישגי התלמיד (r_p =.206, p<.05), אך לא ניתן לומר שקיים קשר כלשהו בין תמיכת תוכן לבין הישגי התלמיד. מודל הרגרסיה הליניארית הראה כי תמיכה רגשית הסבירה רק 3.5% מכלל השונות בהישגי התלמידים במובהקות נמוכה [$F(1,127)$ =5.65, p<0.05].

דיון

השערת המחקר הראשונה הייתה כי ימצא קשר בין אופן הייחוס לבין מידת התמיכה בתלמיד. תוצאה ראשונה שעלתה מן הממצאים, מצאה קשר חיובי בין תמיכה לבין ייחוס פנימי להצלחה וכישלון והפריכה קשר בין תמיכה לבין ייחוס חיצוני. כלומר, ניתן לומר שקיים קשר חיובי בין תמיכה לייחוס פנימי של הצלחות וכישלונות, אך לא ניתן לומר שקיים קשר כלשהו בין תמיכה לייחוס חיצוני של הצלחות וכישלונות.

ניתן להסביר את הקשר בין תמיכה לבין ייחוס פנימי על פי דבריו של בר־טל (1980), שכן קבלת תמיכה, הן זו הרגשית והן זו שמקורה בתוכן, עשויה לסייע לתלמיד להבחין בשינויים בהישגים כתלות במידת המאמץ שהשקיע, ובכך לחזק את מידת הייחוס הפנימי הנשלט להצלחותיו וכישלונותיו בתחום זה. כמו כן, ממצא זה עולה בקנה אחד עם טענותיו של ארקין (2003), לפיהן ניתן להגביר את ציפיות התלמיד להצלחה באמצעות חשיפתו להתנסויות מובנות וחוזרות שבהן יהיה נוכח כי השקעת מאמץ מצדו מובילה לתוצאות לימודיות טובות יותר.

מאידך, את הפרכת הקשר בין תמיכה לבין ייחוס חיצוני ניתן לייחס לפערים הגדולים בין ייחוס חיצוני נשלט לזה הבלתי נשלט. שכן, בעוד תמיכה נכונה עשויה לסייע במיגור התנהגויות שליליות שמקורם בייחוס חיצוני נשלט (דוגמת שימוש בטלפון נייד למשחק בשעת לימוד). תמיכה זו לא יכולה לסייע כנגד הפרעות חיצוניות בלתי נשלטות כגון רעש, חום ותנאים פיזיולוגיים קשים בכיתת הלימוד (Rimm, 1997).

הממצאים שעלו במחקר לא מצאו קשר מובהק בין הישגיהם של התלמידים לבין ייחוס הפנימי וגם החיצוני של התלמידים להצלחה וכישלון.. כלומר, לא ניתן לקבוע קשר כלשהו בין הישגיהם לבין ממד הייחוס של תלמידים כלפי הצלחותיהם וכישלונותיהם. ניתן לייחס ממצא זה לריבוי הגורמים הקשורים בהישגים: גורמים אישיים של התלמידים, יחסי הגומלין שלהם עם אחרים כמו הורים, מורים ומנהלים, ולבסוף המערכות הגדולות יותר המקיפות את התלמיד (בתי ספר, שכונות, כלכלה מקומית, מדיניות פוליטית ויחסים רב תרבותיים). בהקשר זה, ארקין (2003) הציג כיצד אלו הפוחדים מכישלון אינם מציבים לעצמם רמת שאיפה מציאותית. כדי להתמודד עם תחושת הכישלון הם נוקטים אחת משתי דרכים: א) התלמיד מציב לעצמו רמת שאיפה גבוהה מאוד, וכשאינו משיג אותה הוא מנמק לעצמו את הכישלון בכך שרבים בכיתה נכשלו. ב) התלמיד מציב רמת שאיפה נמוכה מאוד, וכשהביצוע גבוה מעט מרמה זו נמנעת ממנו תחושת הכישלון. מתוך הדברים עולה כי ציפיות התלמיד להצלחה משפיעות על תחושת ההצלחה.

תוצאה נוספת שעלתה מן הממצאים הציגה קשר בין תמיכה רגשית בתלמידים דוברי ערבית לבין הישגיהם בבחינת שלוש יחידות לימוד מתמטיקה, אולם הפריכה את הקשר הסטטיסטי בין תמיכת התוכן לבין הישגיהם. כלומר, ניתן לומר שקיים קשר חיובי בין תמיכה רגשית לבין הישגי התלמיד, אך לא ניתן לומר שקיים קשר כלשהו בין תמיכת תוכן לבין הישגי התלמיד. נתונים אלו עולים בקנה אחד עם טענות קודמות הגורסות כי התמיכה הרגשית, הכוללת התאמת דרכי הוראה, קידום מיומנויות למידה ומיומנויות אישיות (הדר-פקר, 2013), כמו גם "הדרכה מרוכזת תלמידים" שנועדה לכלול ארבעה תחומים כלליים: הבדלים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים, מוטיבציוניים ורגשיים, התפתחותיים וחברתיים, ואישיותיים (Cornelius-White & Harbaugh, 2010). כל אלו תורמת רבות לקידום הישגיהם האקדמיים של התלמידים.

לסיכום, ממצאי המחקר אוששו את האבחנה שהתמיכה הרגשית באופן כללי משפיעה על הישגים במתמטיקה בקרב התלמידים הלומדים 3 יחידות במקצוע, וכמו כן, תמיכת מורה המתמטיקה כלפי התלמיד וחיזקו משיעים על הישגי התלמיד במקצוע. באשר לתמיכת תוכן, כפי שעלה בסעיפים הקודמים הרי שניתן לקשור את ממד הייחוס של התלמיד (נשלט או בלתי נשלט) כגורם המשפיע רבות על תרגום התמיכה להישגים.

רשימת מקורות

ארקין, נ' (2003). "ביטויי הייחוסים בהדרכה והתנהגותו המסייעת של המטפל בעבודה סוציאלית." *חיבור לשם קבלת דוקטור בפילוסופיה*, עמ' 9-5. חיפה: אוניברסיטת חיפה.

בן טוב, ע' (2006). *הקשר בין הישגים בלמידה מרחוק לבין עמדה כלפי שיטת הלימוד ותחושת כישלון או הצלחה* (עבודת גמר לצורך קבלת תואר מוסמך במדעי הרוח). אוניברסיטת בן גוריון. עמ' 7-11

הדר-פקר, ד' (2013). *הקשר בין מצב רגשי חברתי ובין הישגים בלימודים של תלמידי בית-ספר*, סקירה מוזמנת כחומר רקע לעבודת הוועדה "מערכת חינוך לכול - ולכל אחד," היוזמה למחקר יישומי בחינוך.

בר טל, ד' (1980). תפיסות והתנהגויות של תלמידים ומורים ניתוח ייחוסי. חוות דעת: *כתב עת לפסיכולוגיה וייעוץ בחינוך*, *13*, 5-22.

ליפשטט, נ', ברצלבסקי, ר' (2017). *תמונת מצב: לימודי המתמטיקה בישראל – דוח מספר 2*. ראמ"ה ומשרד החינוך.

Chohan, B. I., & Khan, R.M. (2010). Impact of parental support on the academic performance and self concept of the student. *Journal of Research and Reflections in Education, 4*(1), 14-26.

Dinkelmann, I., & Buff, A. (2016). Children's and parents' perceptions of parental support and their effects on children's achievement motivation and achievement in mathematics. A longitudinal predictive mediation model. *Learning and Individual Differences*, *50*, 122-132.

Eisenberg, N. (2014). *Altruistic emotion, cognition, and behavior (PLE: Emotion)*. Psychology Press.

Rimm, S.B. (1997). An underachievement epidemic. *Educational Leadership, 54*(7), 18-22.

Weiner, B. (2008). Reflections on the history of attribution theory and research: People, personalities, publications, problems. *Social Psychology, 39(3),* 151-156.

הקשר בין תפקודים ניהוליים ויכולת מתמטית בקרב תלמידי כיתה י"ב, בזיקה להפרעת קשב

יחיאל תנעמי, מכללת חמדת הדרום

מבוא

תפקודים ניהוליים הם אוסף של יכולות מובחנות אך קשורות זו בזו, התורמות ליישום פעולות של פתרון בעיות, מכוונות מטרה. יכולות אלו מחולקות לשני תחומים: **ויסות-ההתנהגות** הכולל עיכוב תגובה, גמישות, שליטה ברגשות ובקרה. **מטה-קוגניציה** הכוללת תכנון וארגון, ארגון-סביבה וחפצים, זיכרון-עבודה וסיום משימה (Gioia & Isquith, 2004). המיומנות הכללית של שימור ופעולה על מידע בראש (זיכרון עבודה), היכולת לדכא מידע מסיח (עיכוב תגובה) (Bull & Scerif, 2001) והיכולת להעביר את הקשב באופן גמיש בין משימות שונות (גמישות חשיבה), הם תהליכים הכרחיים בפתרון מטלות מתמטיות. יש עדויות לקשר עקבי בין התפקודים הניהוליים להישגים במתמטיקה (כמו, Bull & Lee, 2014), והם משמשים כגורם מנבא הצלחה במתמטיקה (כמו, Blair et al., 2015).

מחקרים שנערכו עד כה בדקו את הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים בזיקה לרמות לימוד שונות בבחינת הבגרות (תנעמי ועילם, בדפוס). המחקר הנוכחי בא להעמיק את ההבנה בדבר הקשר שבין תפקודים ניהוליים למתמטיקה ברמות למידה שונות, באמצעות בדיקת הנושא בקרב אוכלוסיית תלמידים עם ובלי הפרעת קשב, שהיא ההפרעה השכיחה יותר במערכת החינוך – בחינוך היסודי (54%) ובחינוך העל יסודי (64%) (הלמ"ס, 2019).

שאלות המחקר

במטרת לבחון את הקשר שבין התפקודים הניהוליים (המיוצגים באמצעות מדד ניהולי כללי, מדד מטה-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות) לבין שני מאפיינים של תלמידים בכיתה י"ב - היכולת המתמטית (המיוצגת באמצעות יחידת הלימוד (יח"ל) בה התלמיד נבחן במתמטיקה; ציון בבחינת הבגרות במתמטיקה) והפרעת קשב (עם / בלי) נוסחו השאלות הבאות:

א. האם יש קשר בין תפקודים ניהוליים ליח"ל בה לומדים התלמידים מתמטיקה?

ב. האם יש קשר בין תפקודים ניהוליים להישגים בבחינת הבגרות במתמטיקה?

ג. האם יש קשר בין תפקודים ניהוליים לבין הפרעת קשב?

מתודולוגיה

המשתתפים: 370 תלמידי כיתה י"ב בגילאי 16-18, הלומדים לקראת 3,4,5 יח"ל בשישה בתי ספר רגילים במרכז הארץ ובדרומה במגזר היהודי, שהמנהלים שתפו פעולה עם החוקר. מהם 84 תלמידים שדיווחו בדיווח עצמי שהם מאובחנים עם הפרעת קשב, כמפורט בטבלה 1.

טבלה 1

התפלגות התלמידים בזיקה ליח"ל ולסטטוס ההפרעה

	3 יח"ל	4 יח"ל	5 יח"ל	Total
מאובחנים עם הפרעת קשב	47	16	21	84
לא מאובחנים	113	62	111	286
Total	160	78	132	370

כלי המחקר

א. ***שאלון למדידת תפקודים ניהוליים*** The Behaviour Rating Inventory of Executive Function–Self Report - BRIEF-SR (Guy, Gioia & Isquith, 2004). בשאלון נבדקים שמונה מרכיבים שונים של תפקודים ניהוליים המחולקים לשני תחומים: ויסות-התנהגות ומטה-קוגניציה, שיחד מרכיבים את המדד הניהולי הכללי.

ב. ***הישגי בחינת בגרות במתמטיקה*** של סוף כיתה י"א. ציון זה הוא תוצר משוקלל של ציון המגן במתמטיקה וציון בבחינת הבגרות הראשונה במתמטיקה בה נבחנו התלמידים בסוף כיתה י"א (שאלון 2 של 3 יח"ל; שאלון 1 של 4-5 יח"ל).

ג. ***שאלון פרטים דמוגרפיים***.

המשתנים

- ***משתנים בלתי תלויים:*** 3,4,5 יח"ל לקראת בגרות; הפרעת קשב (עם / בלי).
- ***משתנים תלויים:*** ציון בגרות במתמטיקה בסוף י"א; התפקודים הניהוליים.

הליך: השאלונים שאושרו על ידי המדען הראשי של משרד החינוך, הועברו בכיתה כחלק משיעור מתמטי במפגש אחד של 30 דקות. לתלמידים הובהר שהם רשאים לא למלא את השאלון ואי מילויו לא יפגע בהם.

אופן ניתוח הנתונים

ממוצעים וסטיות תקן, ניתוחי שונות (Anova, Manova), מתאמים, t-test.

ממצאים

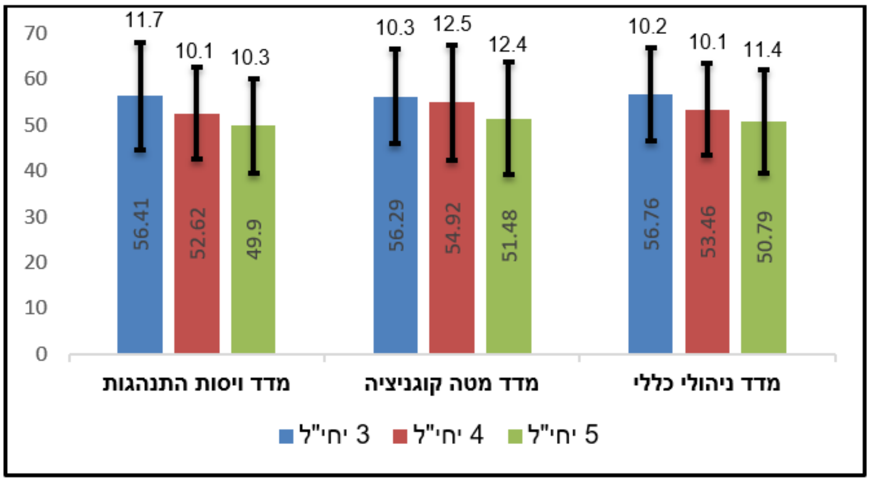
לבדיקת שאלות המחקר נערכו ניתוחי שונות רב כיווניים שבהם המשתנים הבלתי תלויים היו: יח"ל, סטטוס, מגדר (בהתאמה לשאלה) והמשתנים התלויים היו: המדדים המרכזיים של הפונקציות הניהוליות – מדד ניהולי כללי, מדד ויסות-התנהגות ומדד מטה-קוגניציה. מאחר ולא נמצאה אינטראקציה בין מגדר לבין יח"ל וסטטוס התלמיד, צורפו הבנים והבנות כקבוצה אחת לניתוחי השונות הדו כיווניים.

א. בדיקת הקשר בין תפקודים ניהוליים ליכולת מתמטית, המיוצגת באמצעות יח"ל: נמצא אפקט מובהק של מספר יח"ל במדד הניהולי הכללי ובמדד ויסות התנהגות, כך שככל שמספר יח"ל

במתמטיקה גבוה יותר כך רמת התפקודים הניהוליים גבוהה יותר. ההבדלים בין יח"ל בתפקודים הניהוליים מאפיינים תלמידים עם הפרעת קשב וללא הפרעת קשב כאחד כמובא באיור 1.

איור 1

מדד ויסות התנהגות, מדד מטה-קוגניציה ומדד ניהולי כללי – ממוצעים וסטיות תקן בזיקה ליחידות הלימוד, בקרב כל התלמידים. הערה: ערך גבוה של תפקוד ניהולי מעיד על רמה תפקודית נמוכה יותר.

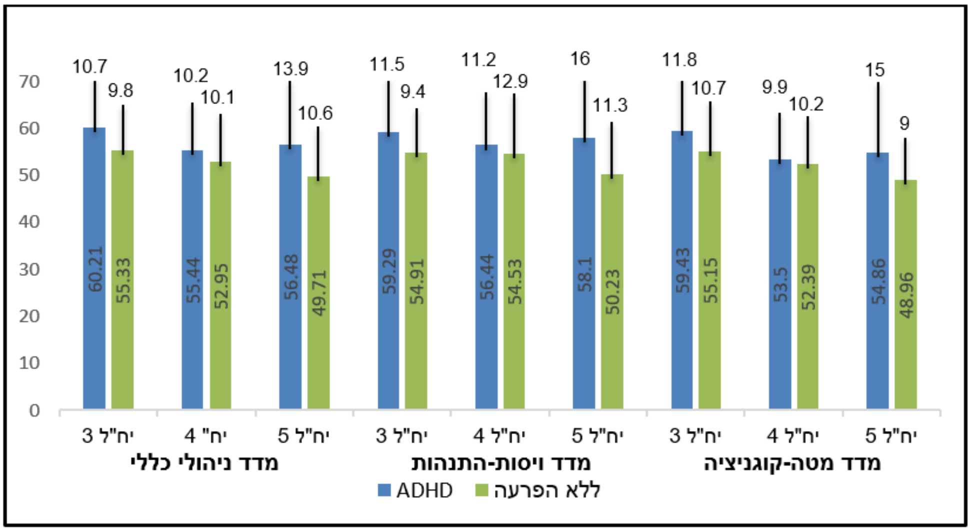


ב. בדיקת הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגי הבגרות במתמטיקה, בזיקה לסטטוס וליח"ל: באמצעות מתאם פירסון נמצא כי ככל שרמת התפקודים הניהוליים גבוהה יותר כך גבוהים יותר ההישגים בבחינת הבגרות. הממצא היה עקבי בכל שלושת מדדי התפקודים הניהוליים והמתאמים נעים בין 43. לבין 33.. קשרים אלו נמצאו רק בקרב תלמידי 4 יח"ל שאינם מאובחנים עם הפרעת קשב.

ג. בדיקת ההבדלים בתפקודים ניהוליים בין תלמידים עם וללא הפרעת קשב: נמצא שלתלמידים עם הפרעת קשב יש רמת תפקודים ניהוליים נמוכה מזו של תלמידים ללא הפרעת קשב, בכל שלושת המדדים המרכזיים. כמו כן, ממצא זה היה עקבי בכל יחידות הלימוד כמובא באיור 2.

איור 2

מדד ניהולי כללי, מדד מטה-קוגניציה ומדד ויסות-התנהגות – ממוצעים וסטיות תקן בזיקה ליחידות הלימוד, בקרב תלמידים עם ובלי הפרעת קשב. הערה: ערך גבוה של תפקוד ניהולי מעיד על רמה תפקודית נמוכה יותר.



דיון

הממצאים עולים בקנה אחד עם ממצאי מחקרים קודמים שמצאו קשר בין תפקודים ניהוליים ליכולות מתמטיות (למשל: Bull & Lee, 2014, תנעמי ועילם, בדפוס). כמו כן נמצא, שלתלמידים עם הפרעת קשב יש קושי משמעותי בתפקודים ניהוליים (למשל: Silverstein, Faraone, Leon, Biederman, Spencer & Adler, 2020), ושתפקודים ניהוליים של תלמידים שאובחנו עם לקויות כלשהן, יהיו נמוכים יותר מאלו של תלמידים ללא לקות למידה (Meltzer & Krishnan, 2007).

למחקר זה מספר חידושים:

א. ממצאי מחקר זה מחזקים את ממצאי המחקרים הקיימים בכך שהם מצביעים על הקשר שבין תפקודים ניהוליים ליכולת מתמטית אשר נשמר בקרב תלמידים עם הפרעת קשב כמו אצל תלמידים עם התפתחות תקינה: ככל שמספר יח"ל גדול יותר כך גדול יותר מספר הנושאים הנלמדים, וגדולה יותר רמת ההעמקה והמורכבות שלהם.

ב. הקשרים בין תפקודים ניהוליים להישגי בגרות במתמטיקה בקרב תלמידי 3 ו- 5 יח"ל עם הפרעת קשב דומים לאלו של תלמידים ללא הפרעת קשב. לעומת זאת קשרים אלו שונים בקרב תלמידי 4 יח"ל. להערכתנו, ההסבר לכך טמון באינטראקציה שבין יכולת מתמטית לבין איכות התפקודים הניהוליים שתשפיע על קבוצת יחידות הלימוד בה ישובץ התלמיד.

ג. תלמידים עם הפרעת קשב לומדים בכל יחידות הלימוד ולהם תפקודים ניהוליים נמוכים, כולל אלו הלומדים ברמת 5 יח"ל.

ד. מחזקים את הטענה שתפקודים ניהוליים מהווים נקודת תורפה בקרב תלמידים עם הפרעת קשב ללא תלות ביכולת המתמטית שלהם.

למחקר זה תרומה תיאורטית שבאה לידי ביטוי בכך שהממצאים מרחיבים את טווח ההכללה של הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בהתייחס לסוגי האוכלוסייה ולרמות לימוד.

בהיבט המעשי, קיימות עדויות מחקריות המצביעות על כך שניתן לשפר הישגים לימודיים באמצעות שיפור התפקודים הניהוליים והתחום הפדגוגי-דידקטי. מהמחקר הנוכחי משתמע ששילוב התפקודים הניהוליים בתהליך ההוראה-למידה בהקשר לתכנים רלוונטיים, יכול לשפר את ההישגים במתמטיקה.

במחקרי המשך, מומלץ לבדוק האם קיימת תרומה דיפרנציאלית של כל אחד מתפקודי הניהול להישגים בבגרות ביחידות הלימוד השונות.

רשימת מקורות

הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה. (2019). השנתון הסטטיסטי לישראל, פרק חינוך והשכלה, לוחות 4.10, 4.25. נדלה ביום 12.5.20.

תנעמי, י' ועילם, א' (בדפוס). "הקשר בין תפקודים ניהוליים להישגים במתמטיקה בקרב תלמידי כיתה י"ב". *מחקר ועיון בחינוך מתמטי.*

Blair, C., Ursache, A., Greenberg, M., Veron-Feagans, L., & The Family Life Project Investigators. (2015). Multiple aspects of self-regulation uniquely predict mathematics but not letter-word knowledge in the early elementary grades. *Developmental Psychology, 51*, 459 – 472.

Bull, R., & Scerif, G. (2001). Executive functioning as a predictor of children's mathematics ability: inhibition, switching and working memory. *Developmental neuropsychology, 19(3),* 273–293.

Bull, E., & Lee, K. (2014). Executive functioning and mathematics achievement. *Child Development Perspectives*, 8(1), 34-41.

Gioia, G.A. & Isquith P.K. (2004). Ecological assessment of executive function in Traumatic Brain Injury. *Developmental Neuropsychology, 25*(1&2), p 135-158.

Guy, S. C., Gioia, G. A., & Isquith, P. K. (2004). *BRIEF-SR: Behavior Rating Inventory of Executive Function--self-report Version: Professional Manual*. Psychological Assessment Resources.

Meltzer, L. Y. N. N., & Krishnan, K. A. L. Y. A. N. I. (2007). Executive function difficulties and learning disabilities. *Executive function in education: From theory to practice*, 77-105.

Silverstein, M. J., Faraone, S. V., Leon, T. L., Biederman, J., Spencer, T. J., & Adler, L. A. (2020). The relationship between executive function deficits and Dsm-5-defined ADHD symptoms. *Journal of attention disorders*, *24*(1), 41-51.

תרומת האנלוגיה בין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי בפתרון מערכת משוואות, בקרב תלמידי 4 יח"ל

כלילה קופרמן[1], איבי קדרון[1], אנטולי קורופטוב[2]

[1] מרכז אקדמי לב; [2] מכללת לוינסקי לחינוך

מבוא

הנושא של שימוש בייצוגים שונים בהוראת המתמטיקה נחקר מזה זמן רב. בפרט, הקשר בין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי של מערכת משוואות. כבר בהיכרות הראשונה של תלמידים עם הייצוג הגרפי של הפונקציה הלינארית, הם לומדים למצוא פתרון של מערכת משוואות לינאריות באמצעות גרף. עם זאת, תלמידים נוטים לפתור מערכת משוואות בכלים אלגבריים בלבד, ולא מוצאים סיבה, או צורך לפתור את המערכת בדרך גרפית. במסגרת מחקר בנושא אנלוגיות, רצינו לעקוב אחר הופעת האנלוגיה בין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי ואחר אופן השימוש בה. לשם כך בנינו מערכת משוואות שלא ניתנת לפתרון בכלים אלגבריים סטנדרטיים, אולם ניתנת לפתרון בקלות יחסית, בדרך גרפית, מתוך מחשבה שהמחסום האלגברי עשוי לעורר את האנלוגיה לעבור לייצוג גרפי.עיקר ההתעניינות שלנו היא באפיון המקרים שבהם אכן התרחשה האנלוגיה. עם זאת, בעת ביצוע המחקר התברר שבקרב כלל תלמידי 4 יח"ל, הלומדים בכיתה יב', לא התרחשה האנלוגיה באופן עצמאי. במהלך הריאיון, לאחר שהתלמידים הגיעו למבוי סתום, המראיינים הציעו את האנלוגיה לעבור לייצוג גרפי. במאמר זה, בחרנו להתייחס דווקא לקבוצה זו, ולבחון את אופן השימוש של התלמידים באנלוגיה לאחר שהוצעה על ידי גורם חיצוני.

רקע תיאורטי

פישביין (1987) מתייחס למודלים אנלוגיים. הוא מגדיר אנלוגיה פנים־מתמטית מסוג שני, בה יש אנלוגיה בין ייצוג סימבולי לייצוג אינטואיטיבי, לעיתים קרובות גיאומטרי. דוגמא טובה לכך היא הקשר בין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי של מערכת משוואות. תרומה מרכזית של השימוש באנלוגיה היא בכך שהאנלוגיה מאפשרת גישה אינטואיטיבית לפעולות מנטליות שעלולות להיות לא נגישות במודל האבסטרקטי. התוצר של הפעולות המנטליות בייצוג האינטואיטיבי מתורגמות למונחים של המערכת המקורית, הסימבולית.

אחד החוקרים שעסק רבות בקשר שבין הייצוג האלגברי לייצוג הגרפי הוא דובל. דובל (2006) מסביר את ההכרח להיעזר בייצוגים שונים על מנת להבין מושגים מתמטיים מופשטים. תפקיד הייצוג אינו רק לתווך את המושגים אלא גם לאפשר לעבוד איתם. הטרנספורמציה של האובייקטים בעזרת ייצוגים היא לב הפעילות המתמטית. דובל מבחין בין שני סוגים של פעילות: פעילות המתרחשת בתוך ייצוג כלשהו (treatment) ומעבר בין ייצוגים שונים (conversion). היכולת לשנות מייצוג אחד לאחר היא לעיתים קרובות המפתח לפתרון הבעיה. ביצוע טרנספורמציות אלו הוא אחד הקשיים הנפוצים עבור הלומדים.

דובל מתייחס לייצוגים השונים כשני עולמות תוכן איזומורפיים, כאשר לעיתים יש עדיפות או הכרח לפתור בעיה בעולם אחד על פני העולם האחר. לעומת זאת, פישביין מדגיש את העובדה שלמודלים האינטואיטיביים יש מאפיינים סנסורים־חושיים. אנלוגיה אינטואיטיבית מספקת משמעות קונקרטית התנהגותית. ההתייחסות של פישביין היא מנקודת מבט של הלומד. ההתמקדות שלנו במאמר היא בלומד, ולכן הניתוח ייעשה על פי גישתו של פישביין.

מתודולוגיה

אוכלוסית המחקר

אוכלוסיית המחקר כללה שנים־עשר זוגות של סטודנטים. ארבעה זוגות מכיתה יב', הלומדים ברמה של 4 יח"ל, ארבעה זוגות מכיתה יב' הלומדים ברמה של 5 יח"ל, וארבעה זוגות של סטודנטים להנדסה שנה ראשונה. במאמר זה נדווח על הממצאים שהתקבלו מתוך קבוצת התלמידים הלומדים ברמת לימוד 4 יח"ל.

כלי המחקר

נבנה שאלון המכיל שתי מערכות משוואות. המערכת הראשונה, ניתנת לפתרון בדרך אלגברית או גרפית. המערכת השנייה לא ניתנת לפתרון בכלים אלגבריים סטנדרטים, ונחוץ מעבר לייצוג גרפי כדי לפתור אותה.

לפניכם מערכת משוואות:

.1 $\begin{cases} y = x^3 \\ x = \sqrt{y} \end{cases}$

.2 $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^3 + 1 \end{cases}$

האם למערכת זו יש פתרון? אם אין - מדוע? אם יש – כמה? נמקו את תשובתכם.

המחקר נערך בצורה של ראיונות אישיים לזוגות של תלמידים. הראיונות צולמו, הוקלטו ותומללו. התלמידים קבלו את השאלון, והתבקשו לפתור אותו ביחד. ההנחיה למראיינים הייתה לתת לתלמידים לעבוד ולא להתערב במהלך העבודה. עם זאת, במקרה שהתלמידים מגיעים למבוי סתום, המראיינים יכולים לתת רמזים לפתרון. רמז ראשון: לשאול האם הם מכירים צורות ייצוג נוספות שאפשר להיעזר בהם? רמז שני: להציע לעבור לייצוג גרפי.

בקרב תלמידי 4 יח"ל, אף זוג לא חשב על האנלוגיה לייצוג גרפי בעצמו. גם הרמז הראשון לא עזר. בכל הראיונות המראיינים הם אלו שהציעו לעבור לייצוג גרפי. כלומר האנלוגיה לייצוג גרפי הגיעה מגורם חיצוני. במחקר זה נדווח כיצד התלמידים השתמשו באנלוגיה זו.

שאלת המחקר

באילו אופנים משתמשים תלמידי 4 יח"ל באנלוגיה לייצוג הגרפי בפתרון מערכת משוואות?

ממצאים ודיון

בחלק זה אתאר את העבודה של שני זוגות תלמידים, ואת אופני השימוש שלהם באנלוגיה.

עדי ואלי פתרו את מערכת המשוואות הראשונה בדרך אלגברית על ידי פירוק לגורמים והשוואת כל גורם לאפס, והגיעו לתשובה. הם ניסו לפתור את המערכת השנייה באותה דרך והגיעו למבוי סתום. המסקנה שלהם הייתה שאין למערכת פתרון. המראיין ניסה לרמוז להם לעבור לייצוג אחר – ללא הועיל. המראיין המשיך לרמוז ואז לפתע התרחשה האנלוגיה בין הייצוגים, ואלי הביע במילים שלו את ההבנה שפתאום צצה.

מראיין: ה $y=x^2$ מזכיר לכם משהו? איזה חיה אחרת?

א. פרבולה. אז רגע, הנה, אז הבנתי. תבדוק אם זה נחתך. אם זה פרבולות שנחתכות. כי אם כן אז יש בעצם את אותו ה־x.

עדי ואלי משרטטים פרבולה בקלות. הם מתאמצים יותר בשרטוט $y=x^3+1$, אולם נעזרים בידע שלהם בחקירת פונקציות, משרטטים גרף ומצביעים על נקודת החיתוך ברביע השני.

ע. ...יש את הנקודה הזאת, יש חיתוך, כי זה)הגרף של $y=x+1^3$(עובר דרך הפרבולה

א. יש פתרון, הפתרון נמצא בחיתוך.

המראיין ממשיך ושואל, האם זה פתרון יחיד, או שיש עוד פתרון? כדי לענות על שאלה זו, הם צריכים לברר מה קורה ברביע הראשון. עדי ואלי מחפשים את נקודת החיתוך, ומציבים ערכים שונים של x. עדי מסתייג מכך שייקח הרבה זמן למצוא את נקודת החיתוך.

ע. אבל זה רחוק מיליון שנה עד שתגיע

א. לא, אני רוצה לראות קצת כיוון

ע. לראות אם הם מתקרבים או שהם מתרחקים, זה הקטע, הבנתי אותך.

לאחר הצבת ערכים שונים ושרטוט הנקודות על גבי הגרף הם מגיעים למסקנה

ע. פה רואים את זה לפי השרטוט, ככל שאתה מגדיל את הערכים של ה־x, המרחק בין הפונקציות גדל, אז הן לא יוכלו להיפגש.

א. יש פה הבדל משמעותי בין הערכים.

ע. אז יש פתרון אחד!

בעבודה של עדי ואלי נראה שהם מיומנים בעבודה בייצוג האלגברי, הם עובדים בו באופן טבעי, והוא ברירת המחדל שלהם. הם גם יודעים לעבוד בייצוג הגרפי. היתה להם היכרות עם הפרבולה, והם ידעו להגיע לגרף של פונקציה נוספת בעזרת חקירה, אולם הם לא נזכרו בידע הזה כאשר היו זקוקים לו. אולי היה זה ידע רדום. חסרה להם האנלוגיה המחברת בין הייצוגים.

ברגע שגורם חיצוני, המראיין, הציע את האנלוגיה, הם מיד הבינו את התועלת שבה. לפי פישביין, המודל הגרפי מאופיין בכך שהוא אינטואיטיבי ודינאמי, ומאפשר להבין את התנהגות הפונקציה. ניתן לראות עדויות לכך בעבודה של עדי ואלי. למשל, ההבנה *שנקודת חיתוך* בין שתי הפונקציות היא הפתרון של המערכת האלגברית, החקירה האם הפונקציות *מתרחקות* זו מזו? האם הן יכולות *להיפגש*? אלו ביטויים המצביעים על תפיסת הגרף בצורה התנהגותית דינאמית. הבנה זו עזרה להם להגיע למסקנה שיש למערכת פתרון, והוא יחיד.

לילך ועדי פתרו את המשימה הראשונה על ידי ניחושים בלבד. הן הצליחו להגיע לשני פתרונות, ושיערו שאין עוד פתרונות, כי לא מצאו, אולם לא היו משוכנעות בכך. כשעברו למשימה השנייה, לא הצליחו לנחש פתרון, אולם הצליחו להתקרב לפתרון על ידי הפעלת שיקולים נומריים:

ע. לדעתי אם x חיובי, אז זה, נניח, נגיד שלוש, אז בריבוע זה יהיה תשע, ופה (x^3+1) זה כבר יהיה יותר גדול, ואז זה עוד יותר מגדיל, אין סיכוי שזה יהיה שווה. אבל אם x מינוס, אז זה (x^2) יישאר חיובי, ואז יהיה לך שלילי (x^3)אבל עם עוד אחד, אולי זה כן יוכל להיות שווה.

לאחר עבודה מאומצת, והצבת ערכים שונים הגיעו למסקנה שיתכן ויש פתרון בתחום שבין 0.5- ל 1- אולם לא מצאו את הערך המדויק. בשלב זה המראיינים הצביעו על המשוואה $y=x^2$, ושאלו אם זה מזכיר להן משהו. פתאום, הן עשו תנועות ידיים המבטאות גרף, ובטאו במילים שלהם כיצד הגרף יכול לעזור.

ל. כאילו, כל מה שמבקשים בשאלה, תכלס, זה למצוא נקודת חיתוך... כאילו מה מבקשים הרי, אם יש לה (למערכת) פתרון. כאילו אם יש תשובה שהיא אותו דבר. אם יש איזו שהיא נקודה שהיא בשניהם.

העבודה שלהן בייצוג הגרפי הייתה חלשה מאד. בהנחיית המראיינים נעזרו בטבלת ערכים, ולבסוף הגיעו לגרף מתאים. כאשר ראו שנקודת החיתוך התקבלה בתחום שבין 0 ל 1- הן מאד שמחו לראות שזה התחום שהגיעו אליו בחישובים הנומריים שעשו קודם.

ל. אז בצד החיובי זה לא יחתוך, בצד השני, אם נציב $x=-1$ אז ה־y שווה אפס. ואז זה הולך למטה.

ע. יש להם פה משהו... אמרתי לך...

ל. יש פתרון!

ע. זה בין אפס למינוס אחת! יש פתרון אחד.

אולם, בכך לא הסתיים הריאיון. בשלב זה, לילך ועדי הציעו לפתור שוב את המערכת הראשונה באותה דרך – כלומר בעזרת גרפים, כדי לוודא אם אכן יש רק שני פתרונות. בשלב ראשון, הסקיצה לא הייתה מדויקת מספיק, והן ראו רק נקודת חיתוך אחת – בראשית הצירים. אולם זה לא הסתדר עם הפתרון אליו הגיעו קודם (1,1). זה אילץ אותן לדייק את הגרף. הן בחנו בנפרד את התחום ש $x>1$ ואת התחום $0<x<1$, נעזרו בהצבה של $x=0.5$ ומצאו גרף מדויק יותר. אמנם, הידע שלהן בגרפים היה חלש, אולם בתמיכה של חישובים נומריים רלוונטיים, ומעברים הלוך וחזור בין עולם המספרים לגרף הצליחו להגיע לשרטוט מהימן. בסופו של דבר, הן ראו שתי נקודות חיתוך, והצדיקו שלא ייתכנו עוד פתרונות.

ע. הגענו לאותה תשובה שהגענו אליה גם בלי הגרף, אבל עכשיו יודעים שאין עוד פתרונות אחרים.

ל. השיטה עם הגרף עזרה לי. פשוט, כאילו לא לדעת ספציפית שהתשובה היא אפס ואחד, אלא לדעת שבצד השלילי הם לא יפגשו, ובצד החיובי יפגשו פעמיים. ואז ישר אפשר לדעת, שהם לא יפגשו יותר. אז כאילו, במקום, להציב, להציב, להציב, אפשר פשוט *לראות* את החוקיות של המשוואות.

אצל לילך ועדי העבודה בייצוג האלגברי היתה חלשה. הן לא פתרו בכלים אלגבריים, אפילו את המערכת הראשונה. אולם השליטה הנומרית שלהן בעולם המספרים היתה טובה, וקרבה אותן לפתרון. גם העבודה בייצוג הגרפי היתה חלשה. עם זאת, הן הבינו את המשמעות של נקודת חיתוך כפתרון מערכת משוואות. כאשר גורם חיצוני, המראיין, הציע את האנלוגיה בין הייצוגים, הן מייד הבינו את התועלת שבה. הן השתמשו באנלוגיה כדי למצוא אם יש למערכת פתרון וגילו בשמחה נקודת

חיתוך שהיא בהלימה עם החישובים הנומריים שעשו קודם לכן. הן השתמשו באנלוגיה במעברים הלוך ושוב בין הייצוגים כדי לדייק את הגרף, ולוודא שאין עוד פתרונות מעבר לפתרונות שניחשו לכתחילה. למרות שכל ייצוג בפני עצמו היה רעוע, עדין היה שימוש לאנלוגיה שהוצעה להן. אולי אפשר אפילו לומר שהאנלוגיה עזרה לייצב את שני הייצוגים החלשים.

סיכום ומסקנות

בעבודה של שני הזוגות המתוארת לעיל, האנלוגיה בין הייצוג האלגברי לגרפי הגיעה מגורם חיצוני, אולם אופן השימוש בה הגיע מהתלמידים עצמם. ניתן להצביע על מספר אופנים:

1. במעבר לייצוג הגרפי, התלמידים התייחסו לפונקציות בצורה דינאמית התנהגותית, בשילוב תנועות ידיים מתאימות. הם דברו על גרף "שעובר דרך הפרבולה", גרפים שנפגשים, נחתכים, מתרחקים או מתקרבים זה לזה. התנסחות זו מתאימה לתיאור של פישביין (1987) של המודל הגרפי שהוא בעל מאפיינים דינאמיים התנהגותיים.
2. המעבר לייצוג הגרפי מספק "תמונה" של המצב ההדדי של שתי הפונקציות. מספיק מבט כדי להבחין שיש פתרון – נקודת חיתוך, ושאין עוד פתרונות. כאשר הפתרון האלגברי מוביל למבוי סתום, והם עסוקים בניחוש פתרונות, ייתכן ולעולם לא היו מגיעים לפתרון, או שלא היו בטוחים שהפתרון יחיד. התמונה מספקת את התשובה לכך – ותמונה שווה אלף מילים!
3. התלמידים השתמשו באנלוגיה בצורה דו־סיטרית. כדי להגיע לגרף מהימן, התלמידים נעזרו בחישובים נומריים/אלגבריים ושרטטו גרף. הם הבחינו כי עליהם להתייחס לתחומים ספציפיים בגרף, ועידנו את החישובים הנומריים/אלגבריים בהתאם, עד שהגיעו לגרף שהם יכולים לסמוך עליו, ולקבוע לפיו את הפתרון למטלה.

תלמידי 4 יח"ל, הנחשבים תלמידים ברמה בינונית־גבוהה, כנראה לא מספיק מודעים לאפשרות של פתרון בדרך גרפית. למרות שיש להם את הידע המתמטי ואת הכלים לפתור בדרך גרפית, פתרון זה לא אינטואיטיבי עבורם. הוא לא זמין בסל המיומנויות שלהם למטרת פתרון מערכת משוואות. היכולת לקשר בין שני הייצוגים, האלגברי והגרפי, מעשירה את ההבנה המתמטית של שני העולמות הללו. כדאי להפגיש את התלמידים במטלות נוספות מהסוג שהיו במחקר זה, הדורשות את המעבר לייצוג הגרפי ובחזרה,כדי לאמן ולחזק את האנלוגיה שבין הייצוגים, ולהמחיש את החשיבות של השליטה במעברים אלו.

Acknowledgment: This research was supported by the Israel Science Foundation (grant number 1815/16).

רשימת מקורות

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, pp 103-131.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach.* Dordrecht: Reidel.

קבוצות דיון, סימפוזיון
ופורום חוקרים צעירים

מתמטיקה ככלי לתיאור ועיסוק ב"עולם": המקרה של קצב שינוי

דפנה אליאס[1], **טומי דרייפוס**[1], **ליה נח-סלע**[1], **אנטולי קורופטוב**, **גילה רון**

[1] אוניברסיטת תל אביב, [2] מכללת לוינסקי, [3] מכללת אוהלו

מבוא

מטרה מרכזית של תכנית הלימודים החדשה לחטיבה העליונה היא קידום יכולות החשיבה והעמקת הידע של התלמידים כדי שיוכלו להצליח בחייהם כאזרחים בעולם הטכנולוגי שאנו חיים בו והכרת תפקידה של המתמטיקה בחיי היום-יום: במדע, בטכנולוגיה, בפרסום וצרכנות, במחשוב ובכלכלת הבית (תכנית לימודים – מתמטיקה 5 יח"ל, 2019, עמ' 2. לא פורסם). מטרה זו רשומה בכל אחד מהתכניות הכיתתיות שפורסמו באתר משרד החינוך בניסוח הבא: "יש התייחסות ליישומים של המתמטיקה בכל תחומי הלימוד, כפי שהם באים לידי ביטוי במדעים השונים ובחיי יום-יום תוך מטרה להדגיש את רלוונטיות היישומים של המתמטיקה הנלמדת לנושאים עכשוויים. השאלות היישומיות נכתבו בצורה אוריינית כך שגוף השאלות מסביר את רלוונטיות המתמטיקה הנלמדת מחד ומרחיב את ההשכלה הכללית של התלמידים בתחום היישומי מאידך" (משרד החינוך, 2019, תכנית הלימודים 5 יח"ל : כיתה יוד, עמ' 2; כיתה י"א, עמ' 2; כיתה י"ב, עמ' 2). כוונת המפגש היא להציע דרכים להשגת מטרה זו בנושא המתמטי של קצב שינוי.

רקע

מטרה זו של תכנית הלימודים עולה בקנה אחד עם מטרות תכניות לימודים בית-ספריות בארצות אחרות. בהולנד, למשל, יסד Freudenthal את כתב העת Educational Studies in Mathematics בשנת 1968 וכמאמר ראשון בחוברת הראשונה פרסם מאמר שכתב בעצמו על נושא שכנראה נראה לו מרכזי ביותר: Why teach mathematics so as to be useful. במאמר זה ובפעילותו בארצו יזם לפני יותר מ-50 שנה את תנועת ה- Realistic Mathematics Education שבה העיקרון המוביל הוא "In its first principles mathematics means mathematizing reality" (p. 7).

במסמך שקובע את הסטנדרטים לבגרות כללית לקראת לימודים על-תיכוניים (Hochschulreife) בתחום המתמטיקה בגרמניה רשומות שלוש התנסויות יסודיות שיש להקנות את לכל תלמיד במתמטיקה, והראשונה מהן: " Mathematik als Werkzeug, um Erscheinungen der Welt aus Natur, Gesellschaft, Kultur, Beruf und Arbeit in einer spezifischen Weise wahrzunehmen und zu verstehen" (p. 9) כלומר "מתמטיקה ככלי כדי לתפוס ולהבין באופן ספציפי תופעות מעולם הטבע, החברה, התרבות, המקצועות והעבודה."

המצב דומה בארצות אחרות, ביניהן אוסטרליה, דנמרק, אנגליה ועוד.

מצד שני, מצב זה שונה מאוד ממה שנהוג בארץ. בארץ רוב השימושים של המתמטיקה הם פנימיים כגון שימוש הנגזרת לחקירת פונקציות, ואם מופיעים שימושים חוץ-מתמטיים, מדובר בסוגים מוגדרים ומוגבלים הנלמדים בדרך כלל בפרקים צדדיים.

כדי למקד את הדיון בקבוצת העבודה, נתרכז בנושא מתמטי מרכזי אחד. החדו"א הוא תחום חשוב בלימודי תיכון ובו שני מושגים יסודיים, נגזרת ואינטגרל. ההיבט היישומי של הנגזרת (כמו גם מקורו במתמטיקה עצמה מבחינה היסטורית) קשור קשר הדוק למושג קצב שינוי.

מרבית המחקרים בנושא קצב השינוי עסקו בתנועה ובמהירות וזהו הנושא הנפוץ בקורסים ובספרי לימוד. יחד עם זאת, יש הקשרים רבים בהם תלמידים נתקלים במושג קצב שינוי בלימודיהם ובחיי היום-יום ואלה ראויים גם הם לדיון מעמיק. כדוגמה ניתן להתייחס אל קצב השינוי של כסף הנכנס לחשבון בנק, מים הזורמים לבריכת שחייה, שינויים במיפלס הכינרת ועוד. התייחסות להקשרים שונים מזמנת ללומד הזדמנות לראות את ה'דומה' בסיטואציות שונות מבחינת הקשר (Wilhelm and Confrey, 2003).

כאשר מורים בוחרים דוגמאות מחיי היום-יום להדגמת נושא קצב השינוי הקבוע (שיפוע של ישר), הם יכולים להציע הזדמנויות לבחון סיטואציות פיזיות (הר משופע לדוגמה) לצד סיטואציות עם קשר לינארי. בהצגת דוגמאות מוחשיות אלה ניתן לעודד תלמידים לחשוב על שיפוע כעל קצב שינוי (Stump, 2001).

בהתייחס לקשיים שיש לתלמידים עם המונח קצב שינוי, מחקרים הראו שלתלמידים סיכוי טוב יותר להבין מונח זה כשהלמידה משלבת טכנולוגיה. כך, Nemirovsky, Tierney & Wright (1998) הראו כיצד תלמידים מבינים את המונח קצב שינוי כשהם חוקרים מיקום ביחס לזמן בעזרת חיישני תנועה. דוגמה אחרת היא סימולציה ממוחשבת בשם MathCars שיוצרה (Kaput, 1994) טען שהיא כלי בעל פוטנציאל לסייע לתלמידים להבין את המונח קצב שינוי ע"י יצירת גרף של שינוי במהירות, כלומר קירוב התאוצה שהיא הנגזרת השנייה של פונקציית המיקום ביחס לזמן.

כפי יוצא מסקר הספרות, מושג קצב השינוי מקשר בין מושג הנגזרת לבין מתמטיקה ככלי תיאור תופעות משתנות באופן רציף בחיי יום-יום ובמדעים. מושג קצב השינוי מופיע בתכנית הלימודים החל מכיתה ז' ועד סוף התיכון. בתכנית הלימודים של חטיבת הביניים מוגדר קצב ההשתנות של פונקציה כ"מנה שבין השינוי בערכי ה- y לבין השינוי בערכי ה-x שלה. אם אותה המנה מתקבלת לכל שני ערכים שונים של x, אז קצב ההשתנות הוא אחיד. בכל מקרה אחר – פונקציה משתנה בקצב שאינו אחיד" (משרד החינוך, 2013, תכנית לימודים – מאוחדת ז-ט, עמ' 41). קצב השינוי מופיע בתכנית בבעיות שונות מחיי יום-יום, בהן גדלים כגון טמפרטורה, נפח נוזל וריכוז תרופה בדם משתנים ביחס לזמן. תכנית הלימודים של כיתה ז' מבקשת להבחין בין קצב שינוי קבוע לקצב שינוי שאינו קבוע עבור פונקציות המיוצגות בגרף או בטבלה, בנוסף להשוואה איכותית בין קצבי שינוי שונים. בתכנית הלימודים של כיתה ח' ישנו קישור בין קצב שינוי קבוע לבין פונקציה קווית ומשוואתה, מעבר לשימוש במושג השיפוע, וחישוב של קצב השתנות אחיד. בתכנית הלימודים של כיתה ט' מצוין כי פונקציה ריבועית אינה בעלת קצב שינוי אחיד.

כהמשך לתוכנית הלימודים לחט"ב, גם תוכנית הלימודים החדשה למתמטיקה ברמת 5 יחידות לימוד בחטיבה העליונה, מדגישה את השימוש שנעשה בפונקציות לתיאור תהליכים ומודלים יישומיים, בהם הפונקציה מתארת השתנות הדדית של שני גדלים.

הנגזרת מוצגת כביטוי לקצב השינוי של הפונקציה שבאמצעותו אפשר להכיר את מירב תכונותיה. מהלך הגדרת הנגזרת יעשה תוך הצגת ההקשר השימושי והפירוש הגרפי של הנגזרת. הפרק ייפתח בהצגת בעיות שימושיות הקשורות לקצב שינוי אחיד או משתנה תוך קישור לנלמד בחט"ב ודגש על מקומו הטבעי של מושג זה בחיי היום-יום על ההצגה הגרפית של ערכים המשתנים בזמן , במקום וכדומה. דוגמאות אפשריות ליישומים: צריכת דלק במשך נסיעה מסוימת, מהירות במשך נסיעה או ריצה, השתנות הטמפרטורה במשך תקופה מסוימת, כמות תרופה ליחידת משקל בגוף בין שתי נטילות, מדד היוקר, צמיחה כלכלית, קצב בניית דירות חדשות, השתנות תל"ג לנפש. בכיתה י"א התלמידים יכירו את הנגזרת השנייה כהשתנות של קצב השינוי של הפונקציה. יעסקו בשינוי קצב השינוי של הפונקציה ובמשמעויות הגרפיות שלה, הבאות לידי ביטוי בתכונת הקעירות. בעיות מציאותיות בהן הנגזרת השנייה מתארת השתנות קצב השינוי של הפונקציה. לדוגמה, בפונקציית דרך לפי זמן הנגזרת הראשונה מתארת מהירות והנגזרת השנייה מתארת תאוצה, השתנות קצב שינוי בבעיות מילוי כדים וכדומה.

שאלות לדיון

גם אם הטיפול בקצב השינוי בתכניות הלימודים של חטיבת הביניים והחטיבה העליונה קוהרנטי, קיים חשש שהמצב בספרי הלימוד ובהרבה כיתות בשטח עדיין לא תואם את תכניות הלימודים. נשאלות שאלות רבות כגון הבאות שמאורגנות ל-4 קבוצות לקראת 4 צוותי עבודה. ובראשן נעמיד שאלה משותפת שהיא מרכזית לדיון בכל אחת מ-4 הקבוצות:

שאלה לכולם: האם ללמד שיפוע / נגזרת במסגרת דוגמאות ללא הקשר חוץ-מתמטי ולקשור אחר כך לקצב שינוי בהקשר חוץ-מתמטי או להצמיח את מושג השיפוע / הנגזרת מתוך מושג קצב השינוי בהקשר שמראש חוץ-מתמטי?

- **1. חט"ב:** בהינתן שקצב שינוי הוא יחס בין הפרשים של (ערכים של) שני גדילים, איך לבנות מושג מורכב זה ובפרט באילו היבטים ואיך לדון על פונקציה קווית, פונקציה ריבועית, פונקציה כללית?
- **2. חט"ב:** במסגרת פונקציה קווית: איך ללמד את עניין של אי-התלות של קצב השינוי ב-"רוחב המדרגה" ובנקודת התחלת המדרגה? (במקרה של קצב שינוי ביחס לזמן: אי-תלות באורך פרק הזמן ובהתחלתו)
- **3. חט"ע:** מתי איך ובאיזה פירוט להתייחס לקיצור המדרגה / פרק הזמן? ואיך לנהל את העובדה שהנגזרת ("קצב שינוי רגעי") היא אידאליזציה מתמטית של קצב שינוי מעשי, שבכל מסגרת שימושית נמדד על פרק זמן (אולי קצר, אבל לא אפסי).
- **4. חט"ע:** איך ללמד קצב שינוי / נגזרת בכיתה י' כדי להמעיט את הקשיים של שימוש במושג זה כשמגיעים להוכחת המשפט היסודי של החדו"א, הדורש שימוש במושג קצב שינוי בפונקציה שלא נתונה באמצעות נוסחה?

קבוצת העבודה תדון בשאלות אלה, ותתחיל לענות עליהן בתקווה להמשך העבודה גם אחרי תום הכנס.

אירגון העבודה של הקבוצה

מנחה: אנטולי קורופטוב

- התארגנות (2 דקות)
- מבוא לרקע המחקרי על מתמטיקה ככלי להבנת העולם (טומי, 5 דקות)
- מבוא לרקע המחקרי על קצב שינוי (דפנה, 5 דקות)
- קצב שינוי בתכנית הלימודים החדשה לחטיבת הביניים (ליה, 5 דקות)
- קצב שינוי בתכנית הלימודים החדשה לחטיבת העליונה (גילה, 5 דקות)
- הקרנת שאלות לדיון
התארגנות לעבודה ב-4 קבוצות על פי השאלות הנ"ל
קביעת אדם רושם ואדם מדווח בכל קבוצה (3 דקות)
- עבודה בקבוצות (20 דקות)
- דיווח של כל קבוצה למליאה (15 דקות, 3 דקות כל קבוצה + זמן מעבר)
- עבודה חוזרת בקבוצות לאור מסקנות הקבוצות האחרות (10 דקות) וכתיבת סיכום ב-3-5 נקודות
- דיווח באמצעות הסיכום הכתוב (15 דקות, 3 דקות כל קבוצה + זמן מעבר)
- סיכום (5 דקות)

הכרה

המחקר שעומד בבסיס ההצעה נתמך על ידי מענק 1743/19 של הקרן הלאומית למדע.

רשימת מקורות

משרד החינוך (2019), המזכירות הפדגוגית, מפמ"ר מתמטיקה, פיתוח תכניות לימודים חדשות, החטיבה העליונה, תכנית הלימודים 5 יח"ל, כיתה יוד, כיתה י"א, כיתה י"ב. מאוחזר ביום 24.7.2020 מ-
https://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativaElyona/pituach.htm

משרד החינוך (2013), המזכירות הפדגוגית, מפמ"ר מתמטיקה, תכניות הלימודים, חטיבת הביניים, תכנית לימודים – מאוחדת ז-ט. מאוחזר ביום 24.7.2020 מ-
https://cms.education.gov.il/EducationCMS/Units/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/ChativatBeinayim/TochnitChadasha.htm

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. Educational Studies in Mathematics 1, 3–8.

Kaput, J. J. (1994). The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. *Didactics of mathematics as a scientific discipline*, 379-397.

Kultusministerkonferenz (2012). Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. [in German]

Nemirovsky, R., Tierney, C., & Wright, T. (1998). Body motion and graphing. *Cognition and instruction*, *16*(2), 119-172.

Stump, S. L. (2001). High school precalculus students' understanding of slope as measure. *School Science and Mathematics*, *101*(2), 81-89.

Wilhelm, J. A., & Confrey, J. (2003). Projecting rate of change in the context of motion onto the context of money. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(6), 887-904.

למידה מרחוק בעידן הקורונה: מפיתוח מקצועי למורים ועד הטמעה בכיתות הלימוד

זהבית כהן, אורית כהן ניסן, תומר פלג, לירון שוורץ-אביעד, אורטל תמר ניצן וחלימה שרקייה

הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

הקדמה

מערכת החינוך מתמודדת כיום עם אתגרים מורכבים כתוצאה מההתפשטות הבלתי צפויה של נגיף הקורונה באוכלוסייה הכללית ובבתי הספר בפרט. התפשטות נגיף הקורונה והסגר שבא בעקבותיו הבהירו לעולם כי מודל ההוראה והלמידה הפרונטלי צריך לעבור שינוי. התפשטות הנגיף והריחוק החברתי גרמו למעבר מהיר ומסחרר מלמידה בכיתה ללמידה דיגיטלית מרחוק. הדבר גרם להצפה של השוק בשפע של כלים טכנולוגיים בהם המורים נדרשים לעשות שימוש. לכן חשוב, יותר מתמיד, להקפיד שלא ייווצר מצב בו הטכנולוגיה תוביל את הפדגוגיה. לאור זאת, המחקר הנוכחי ממקם את הפדגוגיה במרכז התהליך החינוכי, ומתייחס לטכנולוגיה כאל אמצעי ולא מטרה. זאת מתוך תפיסת עולם הטוענת שהכלים הטכנולוגיים באים והולכים, ושימוש שטחי בהם עלול להסיג לאחור את השילוב של פדגוגיות חדשניות שיושמו בכיתות הלימוד. מחקר זה מבוסס על הטענה שישנה חשיבות מכרעת בבניית מסגרות מתודולוגיות שתאפשרנה למורים ולתלמידים לשלב טכנולוגיה באופן מושכל ויעיל. טענה זו מבוססת על ספרות עדכנית המצביעה של צורך ללוות את המורים ולסייע להם לשלב כלים טכנולוגיים בגישות פדגוגיות המעודדות מעבר מהוראה פרונטלית ללמידה פעילה (Barak & Asakle, 2018; Srisawasdi & Panjaburee, 2019). אם כן, תקופה מאתגרת זו מעלה את הצורך במתן מענה לאופן למידה שונה עבור תלמידים אשר מבוסס על למידה מרחוק דרך שימוש בכלים טכנולוגיים שונים, בד בבד עם צורך בשינוי דומה גם עבור הכשרה ופיתוח מקצועי של המורים עצמם. בפרט משום שהיכולת של מורים לטפח את תלמידיהם עם הכישורים הדרושים ללמידה מרחוק מבוססת טכנולוגיה,קשורה ליכולות שלהם עצמם ליישם מיומנויות אלו (Kohen & Kramarski, 2018; Kramarski & Kohen, 2017).

על כן, הסימפוזיון יעסוק בשאלה: אילו פדגוגיות מתאימות ללמידה מרחוק באמצעות טכנולוגיה בפרט בעידן הקורונה, וכיצד ניתן להעריכן הן לצורך פיתוח מקצועי מיטבי של מורים אשר נדרשים להיות מומחים באופן הוראה זה, והן לצורך קידום הלמידה בקרב תלמידים. להלן נציג ארבעה מחקרים:

האחד עוסק בתוכנית לפיתוח מקצועי מיטבי לרכזי מתמטיקה, ואת ההשפעה של התפשטות וירוס הקורונה על מרכיבי התוכנית אשר גרמה לשינוי מיידי בפלטפורמה של התוכנית. המחקר השני עוסק בתוכנית לפיתוח מקצועי למורי מתמטיקה מבוססת־חקר תוך שימוש בטכנולוגיה של מתמטיקה דינמית. המחקר השלישי עוסק בלמידת חקר סביב בעיות אוריינות מתמטית בקרב תלמידים אשר השתתפו בקייטנה שהתקיימה כולה באמצעות למידה מרחוק. המחקר הרביעי עוסק בלמידה מרחוק על בסיס פדגוגיה של כיתה הפוכה בקרב תלמידי תיכון מהמגזר הערבי, והשפעתה על מידת ההבנה התפישתית והמוטיבציה של התלמידים.

מודל התפתחות־מקצועית משולב לרכז מתמטיקה וצוותו בקהילות מקצועיות בימי קורונה

מבוא

המחקר נשען על מחקרים העוסקים במודל פיתוח מקצועי למורי מתמטיקה המובילים קהילות מורים בית־ספריות לצורך הטמעת שינויים לשיפור הוראת המתמטיקה (Cobb & Jackson, 2011; DarlingHammond, Hyler, Gardner, et al., 2017). מודל זה מאפשר הטמעת שינויים בצוותים בקנה מידה רחב ומחייב הרחבת הידע המחקרי־אמפירי לגבי תכניות לפיתוח מקצועי שיתמכו במובילי הקהילות (Boles, Jarry-Shore, Villa, Malamut, & Borko, 2020; Borko et al., 2014, 2017; Cobb & Jackson, 2011; Jackson et al., 2015; Jacobs, Seago, & Koellner, 2017). בהתאם לכך, המחקר בחן תוכנית לפיתוח מקצועי לרכזי מתמטיקה במבנה של קהילה מקצועית. התוכנית נועדה לתמוך ברכזים המטמיעים תוכניות לפיתוח מקצועי בצוותם המהווים קהילה לומדת, במסגרת שעות הצוות השבועיות המוגדרות ברפורמות המורים (The Israeli ministry of education, 2016). מאפייני קהילת הרכזים ומאפייני מפגשי הצוות נבחנו לאור מודל תוכנית לפיתוח מקצועי אפקטיבית למורים (Darling-Hammond et al., 2017) במטרה לאתר את המאפיינים שתמכו ברכזים כמובילי פיתוח מקצועי בקהילות הבית ספריות.

במהלך המחקר פרצה מגפת הקורונה, מפגשי קהילת הרכזים והקהילות הבית ספריות שהתקיימו עד אז במתכונת של פנים אל פנים (פא"פ) עברו למפגשי אונליין סינכרוניים בזום. כתוצאה מכך, הורחבה נקודת המבט המחקרית להשוואת מאפייני קהילת הרכזים ומאפייני קהילות צוות המורים כפי שבאו לידי ביטוי במפגשי פא"פ והאונליין לצורך בחינת יציבותו של מודל הפיתוח המקצועי לאור השינויים. מטרת המחקר היא לבחון אילו מאפייני תוכנית לפיתוח מקצועי אפקטיבית ניכרו בקהילת הרכזים וכן בקהילות הבית־ספריות, תוך השוואה בין מפגשי פא"פ ומפגשי האונליין.

מדגם המחקר כלל 29 רכזי מתמטיקה מבתי ספר בצפון הארץ, אשר השתתפו בקהילת הרכזים והובילו קהילות מורים בית־ספריות, סך־הכול 84 מורים. מבנה מפגש טיפוסי בקהילת הרכזים כלל התנסות בפתרון שיתופי של משימות תוכן מתמטי בקבוצות קטנות, דיון רפלקטיבי מתמטי ודידקטי, ודיון בפן הניהולי, הובלת הצוות לשינוי ושיתוף בקשיים ובאתגרים. המחקר כלל שימוש בשאלונים רפלקטיביים אשר הועברו כ־3 פעמים במהלך ההשתלמות ובחנו את השינויים שחלו בפעילות הרכזים לאורך השנה כמובילי פיתוח מקצועי בקרב הצוות הבית-ספרי. כמו כן, היה שימוש בתצפיות על 3 מפגשי קהילת רכזים ו־3 מפגשי קהילות בית־ספריות. תצפית אחת בכל קהילה הייתה על מפגש פא"פ ושתי התצפיות האחרות על מפגשי האונליין שהתקיימו לאחר חודש מרץ עם פרוץ המגפה.

ממצאים עיקריים

דוחות התצפיות במפגשי קהילת הרכזים פא"פ ואונליין הציגו את כל מאפייני התוכנית לפיתוח מקצועי אפקטיבית: מיקוד בתוכן, עידוד שיתוף פעולה, התנסויות במודלים להוראה, הנחייה ותמיכה מקצועית, משוב ורפלקציה.בפרט, נמצא משקל רב לחשיבות ההנחייה והתמיכה המקצועית הן במפגשי הפא"פ והן במפגשי האונליין.

ממצאי השאלון הרפלקטיבי הצביעו על כך שלאורך כל פרק הזמן בו השתתפו הרכזים בתוכנית, חלו שינויים בפעילותם כמובילי קהילות בית־ספריות,אשר הצביעו על הטמעת כלל מאפייני תוכנית

לפיתוח אפקטיבית במפגשי הפא"פ ומרבית המאפיינים למעט למידה פעילה במפגשי האונליין. במפגשי הפא"פ והאונליין מרבית השינויים שהטמיעו הרכזים שויכו להנחיה ותמיכה מקצועית, מיקוד בתוכן ועידוד שיתוף פעולה. יחד עם זאת, במפגשי האונליין משקלו של המאפיין הראשון פחת באופן יחסי ומשקלם של שני האחרים עלה באופן יחסי.

למידת חקר משולבת טכנולוגיה בתוכנית פיתוח מקצועי למורים

מבוא

במציאות הטכנולוגית כיום, מורים למתמטיקה נדרשים לספק לתלמידים יכולות טכנולוגיות ככלי לפיתוח החשיבה, למידה ויצירת תובנות חדשות. הידע הנדרש לשילוב טכנולוגיות־הוראה בכיתה כולל את הכרת הטכנולוגיה, וחשוב מכך, את אופן השימוש בטכנולוגיה והתאמתה לתוכן הלימודי. לפיכך, הטמעת יכולות אלה בקרב המורים היא משימה חשובה לפיתוח המקצועי שלהם. מתמטיקה דינמית היא טכנולוגיה מתקדמת המאפשרת חקירה של תופעות מתמטיות בעזרת הצגה ויזואלית ושינוי דינמי של מבנים מתמטיים. המחקר הנוכחי בוחן את התהליך שעוברים מורים בשימוש "במעבדה מתמטית", אשר כללה התנסות בטכנולוגיה של מתמטיקה דינמית בלמידת חקר ופתרון בעיות, על העמדות והיכולת של המורים לשלב מעבדה דומה בכיתותיהם. המחקר מבוסס על מודל ה־TPCK (Technology, Pedagogy, Content, Knowledge), המתייחס לידע המתמטי הנדרש להוראת המתמטיקה לצורך פיתוח מקצועי של מורים (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Koehler & Mishra, 2009; Kohen & Kramarski, 2012). על־פי המודל, תהליך ההוראה והלמידה הוא רב־ממדי ודורש התאמה של הטכנולוגיה והפדגוגיה לתמיכה בבניית ההבנה של התוכן המתמטי.

משתתפי המחקר הם כ־60 מורים למתמטיקה אשר השתתפו בתוכנית לפיתוח מקצועי בה הם נחשפו באופן הדרגתי למרכיבי הידע השונים על בסיס מסגרת ה־TPCK. לפי המודל, בתחילה לומדים להשתמש בטכנולוגיה (הכלי הטכנולוגי GeoGebra), לאחר מכן מחברים לטכנולוגיה את לימוד התוכן (גיאומטריה דינמית), ממשיכים בחיבור הטכנולוגיה והתוכן לפדגוגיה (למידת חקר), ולבסוף משלבים בין כל 3 המרכיבים ביחד בבניית פעילות בגיאומטריה דינמית במעבדה מתמטית אשר עושה שימוש בתוכנת הגיאוגברה למטרות חקר.

כלי המחקר כללו שאלון עמדות כלפי ידע טכנולוגי־פדגוגי־תוכני אשר הועבר לפני ואחרי הפעלת מודל המחקר. השאלון כלל התייחסות למרכיבי מסגרת ה־TPCK השונים, כגון: TPCK,CK,TCK,TK וכדומה, כאשר עבור כל היגד המשויך לאחד מהמרכיבים היה על המורים לסמן את מידת הסכמתם עם ההיגד בסולם ליקרט 1-5 (1 – מאוד לא מסכים, 5 – מסכים מאוד). כלי מחקר נוסף בוסס על הפעילות בגיאומטריה דינמית המשלבת חקר אשר נבנתה על ידי המורים לאחר ההתנסות במעבדה. פעילות זו הוערכה על ידי מחוון שנבנה לצורך המחקר הנוכחי ומטרתו להעריך את רמת ה־TPCK של המורים כפי שבאה לידי ביטוי בפעילות.

ממצאים עיקריים

ניתוח שונות מדידות חוזרות שבחן הבדלים בעמדות המורים לפני ואחרי ההתנסות במעבדה בהתייחס לכל אחד ממרכיבי ה־TPCK, העלה כי קיימים הבדלים מובהקים בעמדות המורים רק במרכיבי מסגרת ה־TPCK אשר היוו קשר למרכיב הטכנולוגי, $.134 > \eta^2 > .036$, $p<0.5$, $4.42<F(1,59)<18.41$.

ניתוח פעילויות המורים במעבדה העלה כי המורים פיתחו פעילויות אשר מבטאות רמת תוכן מתמטי גבוהה, בפרט ידע מושגי המצריך הקשרים בין מבנים מתמטיים, רמת ידע פדגוגי גבוהה אשר מאפשרת חקר כגון באמצעות שינוי במבנה דינמי, וכן שימוש ברמה גבוהה בטכנולוגיה דינמית אשר מאפשרת מספר אפשרויות ללמידת חקר.

למידה מקוונת מבוססת חקר סביב בעיות אוריינות מתמטית בעלות הקשר הנדסי טכנולוגי

מבוא

קידום מצוינות במתמטיקה הינו יעד מוביל במערכות חינוך ברחבי העולם ובישראל בפרט, כחלק מתוכניות לאומיות להרחבת מערך משאבי האנוש האיכותי במקצועות המדעים, הטכנולוגיה, ההנדסה והמתמטיקה (STEM). אחד המכשולים בקידום המצוינות במתמטיקה נעוץ בקושי של התלמידים לראות את הרלוונטיות שלה לחיים האמיתיים (Li & Schoenfeld, 2019). הטמעת בעיות אורייניות מתמטיות מבוססות הקשר מהעולם האמיתי בבתי הספר עשויה לקדם מצוינות במתמטיקה על־ידי הגברת המוטיבציה ותמיכה בתהליכי הלמידה של התלמידים (Bennett, Lubben, & Hogarth, 2007; Dori, Avargil, Kohen, & Saar, 2018).

המחקר מבוסס על המסגרת המושגית של פיזה אשר שמה דגש על פיתוח של יכולת אוריינית מתמטית ההכרחית לבוגר מערכת החינוך, ומתמקדת בשלוש קטגוריות המאפיינות את תהליך המידול המתמטי שהלומד עובר בעת פתרון בעיה אוריינית: ניסוח מבנה מתמטי, יישום חישובים והליכים מתמטיים, ופירוש והערכה של מסקנות הפתרונות המתמטיים (OECD, 2015; 2017; Stillman, Brown, Galbraith, & Ng. 2016). למידת חקר, בה התלמידים שותפים בתהליך המידול המתמטי תוך הבניית הידע ופיתוח דרכי פתרון בתהליך של עבודה שיתופית, הינה בעלת פוטנציאל לקידום למידה משמעותית (Artigue & Blomhøj 2013; Vygotsky, 1978). מטרת המחקר העיקרית הנה לבחון את הקשר בין למידת חקר של בעיות אוריינות מתמטיות לבין התפתחות של יכולת אוריינות מתמטית ורמת המוטיבציה ללמוד מתמטיקה בקרב תלמידים.

הבעיות האורייניות בהן נעשה שימוש במחקר זה פותחו במסגרת פרויקט i-MAT (Integrated Math And Technology) בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה בטכניון. בעיות אלו ייחודיות בכך שהן מבוססות על בעיות אותנטיות הלקוחות מתחומי ההנדסה והטכנולוגיה וכוללות את כל שלבי המודל האורייני: ניסוח, יישום ופירוש. אוכלוסיית המחקר כללה כ־800 תלמידים בוגרי כיתות ט' מכל רחבי הארץ (כ־90% לומדים ברמה של 5 יח'), אשר השתתפו בקייטנת קיץ מקוונת בשני מחזורים בני 5 ימים כל אחד. בכל יום התלמידים נחשפו לבעיה אוריינית אחת ועבדו עליה במתכונת של משימת חקר שכללה עבודה שיתופית בין התלמידים. הפלטפורמה אשר אפשרה עבודה שיתופית הייתה שימוש בפאדלט, כלי דיגיטלי המאפשר הצגת מידע ושיתוף תכנים בדרך חזותית של לוח וירטואלי, למענה על שאלת המידול בכל משימה. רמת האוריינות המתמטית של התלמידים ורמת המוטיבציה ללימודי מתמטיקה נבחנה על ידי שאלון עמדות שפותח לצורך המחקר הנוכחי על בסיס המסגרת המושגית של פיזה (OECD, 2015; 2017). השאלון הועבר בתחילת פעילות הקייטנה ובסיומה.

ממצאים עיקריים

כדי לבדוק האם קיימים מתאמים בין שלושת הגורמים של השאלון, נערכו מבחני מתאם פירסון. בניתוח נמצא קשר חיובי גבוה בין היכולת לניסוח ויישום ובין היכולת לפירוש והערכה, $r_{(769)}$=.72, p<.001. כמו כן, נמצא קשר חיובי בינוני בין היכולת לניסוח ויישום ובין המוטיבציה ללמוד מתמטיקה, $r_{(769)}$=.55, p<.001, ובין היכולת לפירוש והערכה ובין המוטיבציה ללמוד מתמטיקה,, $r_{(769)}$=.51, p<.001.

כדי לבדוק האם קיימים הבדלים ברמת האוריינות המתמטית ורמת המוטיבציה ללמוד מתמטיקה, לפני ואחרי ההשתתפות בקייטנה, נערכו מבחני t למדגמים תלויים. בניתוח נמצא כי המדדים של רמת האוריינות המתמטית, ניסוח ויישום $t_{(452)}$=-3.53, p<.001, ופירוש והערכה $t_{(452)}$=-4.56, p<.001, של התלמידים עלו באופן מובהק אחרי ההשתתפות בקייטנה. כמו כן, רמת המוטיבציה ללמוד מתמטיקה, עלתה גם היא באופן מובהק אחרי ההשתתפות בקייטנה $t_{(452)}$=-3.33, p<.01.

נוסף על כך, מניתוח ממצאי כלי הפאדלט, עולה כי התלמידים הפגינו רמת חקר המאופיינת בעיקר בהדגמה של יכולת ניסוח דרכי פתרון מתמטיות לבעיות מהעולם האמיתי.

השפעת הכיתה ההפוכה במתמטיקה על הבנה תפיסתית ומוטיבציה של תלמידי תיכון מהמגזר הערבי בישראל

מבוא

מחקרים בינלאומיים מראים כי קיימים פערים בשיעורי ההצלחה בתחומי מדעים וטכנולוגיה בכלל ובמתמטיקה בפרט בין תלמידים בני מיעוטים למגזר היהודי (Friedman-Sokuler & Justman, 2019; OECD, 2010). שימוש בטכנולוגיה לקידום הישגי למידה הינו רווח, בפרט ישנם מחקרים התומכים בשימוש בשיטת הכיתה ההפוכה בחינוך המתמטי לשיפור הבנה תפיסתית והגברת המוטיבציה של תלמידים ללמוד מתמטיקה (Bhagat, Chang, & Chang, 2016). הכיתה ההפוכה היא סביבת למידה המבוססת על רעיון הפוך לשיטת הלימוד המסורתית. בשיטה זו, אנשי הוראה משתמשים בטכנולוגיה במטרה לשלב גם למידה מקוונת וגם פנים אל פנים בכיתה, ובכך "הופכים" את הגישה המסורתית ללמידה (Baepler, Walker, & Driessen, 2014). כאמור, אם בשיטה הרגילה התלמידים לומדים בכיתה ומתרגלים בבית, בשיטת הכיתה ההפוכה התלמידים לומדים את התכנים המתמטיים באופן מקוון מחוץ לכיתה, כאשר אחר כך הזמן בכיתה מוקדש בעיקר לתרגול.

עם זאת, מעט מאוד ידוע על השפעת הלמידה בכיתה הפוכה במתמטיקה בקרב בני מיעוטים בכלל, ועל תלמידים מהמגזר הערבי בפרט. ולכן מטרת המחקר הנוכחי היא לחקור האם ואיך שילוב הכיתה ההפוכה בלימודי מתמטיקה משפיע על ההבנה התפיסתית והמוטיבציה בקרב תלמידי תיכון מהמגזר הערבי בישראל.

הסביבה המקוונת לצורך יישום הכיתה ההפוכה במחקר זה הינה באמצעות אתר האינטרנט bscool.com שמכיל חומר מצולם של כל היחידות הנלמדות לבגרות במתמטיקה בשפה הערבית.

המשתתפים במחקר הם כ־40 תלמידי כיתה י' מצוינות, וכ־40 תלמידי כיתה י"א מצוינות, אשר הגיעו למרכז פרטי אלחוארזמי במטרה ללמוד שיעורי מתמטיקה הנלמדים בהתאם לתוכנית הלימודים בתיכון. כמחציתם למדו באמצעות פלטפורמת האתר וכמחציתם למדו בשיטה המסורתית, תוכן

פורום חוקרים צעירים

גיל שורץ[1], מירב וינגרדן[2]

[1] מכון ויצמן למדע; [2] הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

עם התמסדותו של כנס ירושלים למחקר בחינוך מתמטי ועם גיבושה של קהילת חוקרי החינוך המתמטי בארץ, מתרקמת בצורה לא רשמית קהילה של חוקרים צעירים. חוקרים צעירים אלו, מנסים לסלול, כל אחד ואחת, את דרכם ודרכן המחקרית בתוך העולם האקדמי הגדול והמורכב. דרך זו מלווה בלא מעט התמודדויות, דילמות ואתגרים המשותפים, בצורה זו או אחרת, לחלק גדול מהם (Boaler, Ball, & Even, 2003). גיבוש קהילה זו של חוקרים צעירים בצורה יותר רשמית וממוסדת, בדומה לארגוני מחקר הקיימים בעולם (כדוגמת YERME – Young European Researchers in Mathematics Education), עשוי לסייע ולתרום לחוקרים אלו בעשייתם הנוכחית ובהמשך מסלול חייהם האקדמי.

בכנס ירושלים השמיני התקיים המפגש הראשון של פורום החוקרים הצעירים. במפגש זה ערכנו היכרות עם החוקרים הצעירים ושוחחנו עם ד"ר זהבית כהן, ראש המסלול להוראת המתמטיקה בחטיבה העליונה בפקולטה לחינוך בטכניון, שהינה חברת סגל חדשה. זהבית שיתפה אותנו במסלול האקדמי אותו עברה תוך מענה לשאלות ומתן עצות הקשורות לתהליך הצמיחה כחוקרים. בנוסף, חלק מרכזי במפגש עסק בדיון בסוגיות הבוערות המעסיקות חוקרים צעירים בתחום החינוך המתמטי בארץ. המשתתפים העלו את האתגרים איתם הם מתמודדים במהלך מחקריהם והופתעו לגלות שישנם לא מעט אחרים המתמודדים עם אותם אתגרים. בין היתר, דנו במקומנו בקהילת החינוך המתמטי בארץ, עסקנו בקשרים הרצויים והמצויים בין המחקר לשדה והתלבטנו יחד בשאלה האם חשוב שמחקרים בחינוך מתמטי יהיו ניתנים לשילוב ויישום בשטח.

במסגרת הסדנה נרצה להעמיק את הדיון בנושאים אלו ואחרים, תוך עיון במחקרים ומאמרי דעה המציגים גישות שונות לסוגיות שהוזכרו. בנוסף, נערוך סדנה בה כמה מן החוקרים הצעירים יציגו אתגר בו הם נתקלו במסגרת מחקריהם המתהווים ואתגר זה יהווה סוגיה לדיון בקבוצה.

חלק ראשון: המשך חשיבה משותפת

בחלקה הראשון של הסדנה נערוך היכרות עם המשתתפים שחשובה מאוד למיסודו של פורום זה ולהמשך פעילותו. לאחר מכן, נתחלק לקבוצות ונדון בסוגיות שעלו בכנס ירושלים השמיני ובסוגיות נוספות שצצו מאז: הקשר בין המחקר לשדה, עתיד המחקר בחינוך מתמטי, מקום החוקרים הצעירים בקהילה, מחקר בזמן הקורונה ועוד. דיון בסוגיות אלו ייסוב סביב קטעים רלוונטיים ממאמרי דעה מגוונים (Labaree, 2003; Verschaffel, Schukajlow, Star, & Van Dooren, 2014).

חלק שני: "באתי לעזרת חבר"

בחלקה השני של הסדנה, בניסיון להתמודד באופן מעשי עם האתגרים והסוגיות הרלוונטיות לחוקרים צעירים, יציגו 2-3 חוקרים צעירים אתגר שאיתו הם מתמודדים במהלך העשייה המחקרית שלהם (למשל במהלך קריאה, סקר ספרות, ניתוח, כתיבה וכו'). על בסיס התוכן המחקרי של מחקרים אלו, המתמקדים בחינוך מתמטי, נדון בשלבי המחקר השונים ובאתגרים המלווים לכל שלב. המשתתפים יוכלו לסייעו בהצגת גישות מחקר שונות, מאמרים מעניינים שיכולים לסייע, שיטות ניתוח מגוונות ובאופן כללי, טיפים ועצות לשלבים השונים של המחקר (Cai et al., 2019a, 2019b, 2019c).

במושב האחרון, נסכם את שני החלקים של סדנה מעשית זו במחשבה משותפת על עתיד הפורום, על פעילויות רצויות לשנה הקרובה ועל מינוי אחראים נוספים לפעילות. אנו מקוות שהסדנה, והפורו ם המתהווה, יהוו מקור לצמיחה לחוקרים צעירים בקהילה.

מקורות

Boaler, J., Ball, D. L., & Even, R. (2003). Preparing Mathematics Education Researchers for Disciplined Inquiry: Learning from, in, and for Practice. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), Second International Handbook of Mathematics Education (Springer, pp. 489–519).

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., … Hiebert, J. (2019a). Choosing and justifying robust methods for educational research. Journal for Research in Mathematics Education, 50(4), 342–348. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.4.0342

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., … Hiebert, J. (2019b). Posing significant research questions. Journal for Research in Mathematics Education, 50(2), 114–120. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.2.0114

Cai, J., Morris, A., Hohensee, C., Hwang, S., Robison, V., Cirillo, M., … Hiebert, J. (2019c). Theoretical framing as justifying. Journal for Research in Mathematics Education, 50(3), 218–224. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.3.0218

Labaree, D. F. (2003). Educational Researchers, 32(4), 13–.22

Verschaffel, L., Schukajlow, S., Star, J., & Van Dooren, W. (2014). Encyclopedia of Mathematics Education. (S. Lerman, Ed.). Springer.

מיצגים

תכנית הכשרה מקצועית לגננות כמנוף לפיתוח הידע שלהן ושל תלמידיהן בגן בנושא גופים

הודא שאיב[1], **מיכל טבח**[2]

[1] אקדמיית אלקאסמי – מכללה אקדמית לחינוך; [2] אוניברסיטת תל אביב

מבוא

בשנים האחרונות התחדש העניין בהוראה ולמידה של מתמטיקה לגיל צעיר, ובפרט הודגשה חשיבות רבה להוראת מושגים גיאומטריים בגיל צעיר (Tirosh et al., 2018). תלמידים צעירים לומדים ואף מפתחים מושגים גיאומטריים לפני כניסתם לכיתה א'. לכן, הידע המתמטי של התלמידים צריך להיות מפותח מגיל צעיר (Clements & Sarama, 2007). מחקר זה התבצע במסגרת הפעלת תוכנית הכשרה מקצועית לגננות, במטרה כפולה: לבדוק אם חל שינוי בידע גיאומטרי של הגננות הדרוש להוראת גופים; וכן לבדוק האם בעקבות השתתפות בתכנית ההכשרה, חל שינוי גם בידע של ילדי הגן של גננות אלה. לכן, מטרתו המרכזית של המחקר הינה לבחון כיצד משתקף ידע מתמטי של גננות הדרוש להוראת גופים בחשיבה הגיאומטרית של תלמידיהן בנושא גופים.

רקע תיאורטי

ישנם אתגרים במהלך למידת גיאומטריה בגיל צעיר, במיוחד עבור גופים (צרפתי ופטקין, 2014). זוג החוקרים ואן-הילה (Van Hiele, 1986) ניסו לתת הסבר לעובדה שלומדים רבים נתקלים בקשיים בכל הקשור לתהליכים המעורבים בחשיבה גיאומטרית. הם הציעו כי קשיים רבים בלמידת הגיאומטריה נובעים מתוך אי התאמה בין רמת ההוראה לבין רמת ההבנה הגיאומטרית של הלומדים. לאור האמור, תיאוריית החשיבה הגיאומטרית של הזוג ואן-הילה נבחרה על מנת להגדיר לגננות את רמות התפתחות החשיבה הגיאומטרית.

מספר מחקרים (למשל, Tirosh et al., 2011) דנו בנושא קידום מקצועי של מורים למתמטיקה, והדגימו כיצד היוותה תכנית הכשרה מקצועית בסיס להצמחת ידע מתמטי הנחוץ להוראה שעוסקים בנושאים מסוימים במתמטיקה. עם זאת, ישנם מעט מחקרים (כמו, Tirosh et al., 2011) המקשרים בין התפתחותם המקצועית של המורים המשתתפים בתכנית ההכשרה מקצועית, לבין שיפור הישגי התלמידים.

מתודולוגיה

המחקר הנוכחי הוא חלק ממחקר גדול יותר שדן בזיהוי גופים, מפרק הגיאומטריה מתכנית הלימודים למתמטיקה לקדם יסודי (2010), במסגרת הכשרה מקצועית. בהתאם לכך הוצגו שאלות המחקר הבאות:

1) האם השתתפות גננות בתוכנית הכשרה מקצועית שעוצבה בקפדנות משפיעה על קידום הידע הדרוש להוראת נושא גופים? באיזו מידה?

2) האם חל שינוי בזיהוי גופים וברמות החשיבה הגיאומטרית של תלמידי הגננות המשתתפות בתכנית הכשרה זו בשתי נקודות זמן; לפני ואחרי ההשתתפות בתכנית? באיזה מידה?

במחקר השתתפו שתי קבוצות; הראשונה כללה גננות אשר השתתפו בתכנית הכשרה מקצועית, שהתמקדה בקידום ידע המשתתפות לגבי גופים והוראתם. השנייה כללה חלק מילדי הגן של אותן גננות. המחקר בדק ידע תוכן של הגננות באמצעות שאלונים לפני ואחרי ההשתתפות בתוכנית ההכשרה. הגופים שהוצגו בשאלונים אשר הוצגו למשתתפות המחקר נבעו מתוך רציונל תיאורטי (Tsamir et al., 2008) ומתוך תפיסה שניתן לסווג גופים אלה על-פי שיקולים מתמטיים וגם לפי שיקולים פסיכו-דידקטיים, כמו כן נלקח בחשבון אורך השאלון. השיקול המתמטי הוביל להצגת דוגמאות ואי-דוגמאות של כל גוף. השיקול הפסיכו-דידקטי הוליך לכך שבשאלון מבחן ידע מתמטי הוצגו גופים טיפוסיים וגופים לא-טיפוסיים למשתתפות המחקר. בנוסף, כדי לבחון כיצד משתקף קידום ידע גננות בפיתוח חשיבה גיאומטרית אצל תלמידיהן, נבדק ידע התוכן של חלק מילדי הגן של המשתתפות בתכנית ההכשרה, לפני ואחרי תכנית ההכשרה. ידע-תוכן של משתתפי המחקר עבר שני סוגי ניתוח בתוך כל קבוצת משתתפים בנפרד; הראשון סטטיסטיקה תיאורית; והשני סטטיסטיקה היסקית. ממצאים ידע מתמטי לגננות ותלמידיהן

בהקשר לידע תלמידי המחקר (ילדי גן-חובה), בדבר זיהוי מגוון רחב של גופים מוצגת להלן טבלה 1 המתארת את ממצאי סטטיסטיקה תיאורית כלליים עבור זיהוי נכון לכל הגופים (כדור, חרוט, גליל ופירמידה), בהתייחס לשתי נקודות זמן; לפני הפעלת תכנית ההכשרה ולאחריה (ראיון מקדים ומסכם).

המבחנים המקדימים העלו קשיים בזיהוי גופים והראו כי תלמידי המחקר פוסלים דוגמאות שאינן-טיפוסיות לגופים יותר מאשר דוגמאות טיפוסיות באותו מבחן מקדים. אמנם, הקשיים שעלו במבחנים מקדימים צומצמו במידה ניכרת במבחנים מסכמים עבור אותה מטלת זיהוי גופים. דהיינו, קיים פער משמעותי בין ממוצעי זיהוי נכונים לתלמידים, בהתייחס לשני הראיונות; המקדים והמסכם. מתוך כך, זוהתה התקדמות משמעותית סטטיסטית בידע התלמידים במטלות זיהוי במרבית הגופים שהוצגו לתלמידים במהלך המחקר (בהצגה נתייחס גם לממצאים הנוגעים לנימוקים).

טבלה 1

טבלה מרכזת לשכיחות זיהוי נכון של ילדי-הגן לכל הגופים (באחוזים)

גופים	דוגמאות		אי-דוגמאות	
	ראיון מקדים N=200	ראיון מסכם N=200	ראיון מקדים N=200	ראיון מסכם N=200
טיפוסיות	66	93	89	96
לא טיפוסיות	40	79	79	88

בהקשר לידע גננות באשר לידע תכן מתמטי, להלן טבלה 2 המפרטת את אחוזי זיהוי נכון של הגננות עבור כל הגופים:

טבלה 2

טבלה מרכזת לשכיחות זיהוי נכון של גננות לכל הגופים (באחוזים)

גופים	דוגמאות		אי-דוגמאות	
	שאלון מקדים N=20	שאלון מסכם N=20	שאלון מקדים N=20	שאלון מסכם N=20
טיפוסיות	95	100	100	100
לא טיפוסיות	65	94	88	99

הממצאים מראים כי מרבית הגננות זיהו נכון את הגופים במבחן מקדים ומסכם. זאת, בשונה מתלמידיהן בנוגע לאותה מטלת זיהוי גופים במבחן מקדים. יחד עם זאת, עולה כי הגננות מודעות פחות (במבחן מקדים) בדומה לתלמידיהן בזיהוי אי-דוגמאות שאינן-טיפוסיות עבור מרבית הגופים. כשני שליש לא זיהו נכון את הדוגמאות שאינן טיפוסיות של הגופים.

הממצאים הראו התקדמות בין המבחן המקדים למבחן המסכם באחוז הגננות שזיהו נכון את הגופים שהתקשו בזיהויים במבחן מקדים. כעדות נוספת לממצא זה, נמצאו הבדלים משמעותיים סטטיסטית עבור זיהוי גליל ופירמידה בהתייחס לשני המבחנים.

דיון

בהלימה לממצאים שעלו ממחקר זה, ניתן ללמוד כי שינוי ידע גננות, ממוקד, מאפשר שינוי ידע תלמידיהן. הקשיים שאותרו בקרב מרבית הגננות ותלמידיהן במבחנים מקדימים התגלו בזיהוי דוגמאות לא-טיפוסיות של צורות וגופים. למעשה, הטיפול כן התרחש בקשיים אלו. אכן, ממצאי מבחנים מסכמים העלו כי אכן צומצמו אחוזי שגיאות נפוצות אלה בקרב מרבית המשתתפים במידה ניכרת; גם הגננות וגם תלמידיהן. כלומר ניכר שיפור בידע תלמידי המחקר והגננות במבחנים מסכמים בזיהוי דוגמאות לא-טיפוסיות. משמע, שניתן להרחיב את דימוי המושג בעזרת הוראה מתאימה לגננות והעלאת המודעות שלהן לסוג הזה של גופים מאפשרת להשפיע גם על ידע תלמידיהן בנושא.

הקשיים שאותרו בקרב המשתתפים במחקר הנוכחי במבחנים מקדימים בין אם היו גננות או תלמידיהן, ניתנים להסבר בעזרת התיאוריה שמסבירה תהליך רכישת מושגים גיאומטריים של ווינר (Vinner, 1991), ואת הקשיים שנתקלים בהם התלמידים והגננות לגבי ההגדרה ודימוי המושג של אותו מושג. לאור זה, אנו ממליצות להדגיש לגננות בתכניות הכשרה מקצועיות את חשיבות בחירת הדוגמאות והאי-דוגמאות שיוצגו לתלמידיהן במהלך הבניית ידע לגבי המושג. ניתן ללמוד כי התערבות לא ארוכה עם גננות במהלך תכנית ההכשרה מקצועית ובהיקף של 30 שעות, מתוכננת לפי עקרונות מסוימים הובילה לשינוי בידע המשתלמות ובידע תלמידיהן בגן.

רשימת מקורות

משרד החינוך, התרבות והספורט, המזכירות הפדגוגית, האגף לתכנון ולפיתוח תוכניות לימודים (2010) תכנית לימודים במתמטיקה לחינוך הקדם יסודי, מעלות.

https://meyda.education.gov.il/files/Mazkirut_Pedagogit/Matematika/TochnitKdamYesodiHeb.pdf

צרפתי, י', פטקין, ד' (2014). אומרים שאני אינני אני, אז מי אני בכלל? היכולת של ילדי כיתות ב לזהות ולאפיין גופים ידועים במצגים שונים. *מספר חזק 2000, 25*, 50–35.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Effects of preschool mathematics curriculum: Summative research on the Building Blocks project. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*, 136-163.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., & Tabach, M. (2011). From preschool teachers' professional development to children' knowledge: Comparing sets. *The Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(2), 113-131.

Tirosh, D., Tsamir, P., Barkai, R & Levenson, E. (2018). Engaging young children with mathematical activities involving different representations: Triangles, patterns, and counting objects. *CEPS Journal: Center for Educational Policy Studies Journal, 8*(2), 9-30.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). *Intuitive nonexamples: The case of triangles.* Educational Studies in Mathematics, 69, 81-95.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ההשפעה של קורס העשרה במתמטיקה על מיומנויות ועמדות תלמידים ועל תפיסות מורים

אחלאם מחאג'נה[1], אבי ברמן[2], רוזה לייקין[1]

[1] אוניברסיטת חיפה; [2] הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

מבוא

הוראת בעיות מאתגרות לא שגרתיות מיועדת בדרך כלל לתלמידים מחוננים ומצטיינים. עם זאת, יש חוקרים שלדעתם יש לתת הזדמנות לתלמידים בכל הרמות להתמודד עם בעיות מאתגרות (Koichu, Berman & Moore, 2004; Leikin, 2009). המחקר נערך בקרב תלמידים רגילים ונעשה בהיקף גדול ובמסגרתו ניתן לתלמידים קורס העשרה בבעיות מאתגרות לא שגרתיות. לרוב הבעיות קיימות דרכי פתרון מרובות. בעיות מסוג זה מהוות כלי שימושי לפיתוח והערכה של היצירתיות המתמטית (Ervynck, 1991). **מטרת המחקר** היא לבדוק את ההתפתחות של מיומנויות מתמטיות ועמדות תלמידים כלפי מתמטיקה ואת תפיסות מורים לגבי הוראת בעיות אתגר. מהמטרה נגזרות **השאלות**:

1. האם השתתפות של תלמידים בקורס העשרה משפיעה על המאפיינים הבאים: הישגי התלמידים במתמטיקה, יצירתיות הקשורה לפתרון בעיות בדרכים שונות, הצלחתם בפתרון בעיות לא שגרתיות, שלא נלמדו בקורס ועל עמדות התלמידים ביחס למתמטיקה? אם כן, כיצד? אם לא, איך אפשר להסביר חוסר שינוי?
2. איך השפיעה הוראת בעיות ההעשרה על הוראת המורים בשיעורים הרגילים?

מתודולוגיה

המחקר כלל תלמידים מכיתה ט'. 142 תלמידים בקבוצת הניסוי, 142 תלמידים בביקורת ו־5 מורים שלימדו את קורס ההעשרה (הנספח כולל דוגמאות לבעיות שניתנו בקורס). המורים עברו הכשרה להוראת בעיות שלימדו בקורס. ההכשרה כללה אסטרטגיות פתרון, מתן רמזים לתלמידים מתקשים ופתרון בעיות בדרכים שונות. כלי המחקר כללו – מבחן הישגים, מבחן העשרה, מבחן יצירתיות ושאלון עמדות עבור התלמידים לפני ואחרי קורס ההעשרה וראיונות עבור המורים. שיטת המחקר הייתה משולבת כמותית ואיכותנית.

ממצאים

ממצאי המחקר הכמותיים (שאלה 1) הראו שיפור מובהק בהישגי התלמידים במתמטיקה, ביכולתם לפתור בעיות חדשות (כפי שמוצג בטבלה 1) ובעמדות שלהם כלפי מקצוע המתמטיקה בעקבות ההשתתפות בקורס ההעשרה.

טבלה 1

ניתוח ההישגים בלימודים ובהעשרה לפני ואחרי קורס ההעשרה

	לפני (%)		אחרי (%)		מבחנים סטטיסטיים (MANOVA)			
					time		*(time×group)*	
מבחנים	קבוצת הניסוי M(SD)	קבוצת הביקורת M(SD)	קבוצת הניסוי M(SD)	קבוצת הביקורת M(SD)	F 1282	η_p^2	F 1282	η_p^2
הישגים	65 (18)	65 (21)	81 (10)	66 (19)	255.54*	0.227	173.1*	0.164
העשרה	36 (15)	33 (14)	65 (20)	36 (14)	181.45*	0.392	122.25*	0.302

Note: * *sig*<0.001

הממצאים עבור מבחן היצירתיות הראו שיפור מובהק במדדי היצירתיות אצל קבוצת הניסוי. שיפור *בשטף*, המתבטא במספר הפתרונות שנתנו התלמידים לכל בעיה. במבחן לפני היו 0 או 1, במבחן שלאחר הקורס היו 0-3 פתרונות לבעיה. *הגמישות* השתנתה מפתרון בעיה באמצעות ייצוג אחד לפתרון באמצעות עד 3 ייצוגים לאחר הקורס. גם *המקוריות* שופרה משמעותית. במבחן לפני, רוב הפתרונות לא היו מקוריים. במבחן אחרי היו לא מעט סטודנטים שפתרו את הבעיות בדרכים שלא השתמשו בהן יותר מ־15% מכלל התלמידים, אחוז שמצביע כי הפתרון הוא מקורי.

מממצאי המחקר האיכותניים (שאלה 2) עולה כי המורים התלהבו מהוראת בעיות והתחילו לשלב בעיות מאתגרות בהוראה הרגילה שלהם. המורים הציעו שיטות לשילוב בעיות העשרה בהוראה, כמו: דרישה לפתור בעיות בדרכים רבות, שילוב בעיה בכל שיעור, שילוב בעיות בדפי עבודה, הוספת סעיפים שדורשים חשיבה לתרגילים הרגילים, התאמת בעיות לנושאים בתוכנית הלימודים וסיכום נושאי ם באמצעות בעיות. בנוסף, המורים הציגו חידושים בדרכי ההוראה שלהם בעקבות קורס ההעשרה, כמו: פיתוח חשיבה יצירתית, עידוד תלמידים לפתור בעיות, גם אם הפתרונות לא שלמים, שימוש בטכנולוגיה, שילוב מתוכנן של בעיות בהוראה, הנחייה והדרכה בנוסף להוראה פרונטלית ובניית כיתות העשרה דומות לקורס.

דיון

המחקר בדק את השפעות קורס ההעשרה המבוסס על בעיות מאתגרות, על התלמידים והמורים. רוב המחקרים על פתרון בעיות מאתגרות נעשו על תלמידים מחוננים. הייחודיות של המחקר הנוכחי מתבטאת בכך שהוא בדק השפעה של התערבות חינוכית בקרב תלמידים רגילים. שיפור משמעותי בהישגי התלמידים והתפתחות מדהימה התרחשה ביכולותיהם לפתור בעיות חדשות. הם צוידו במהלך קורס ההעשרה באסטרטגיות לפתרון והפכו למנוסים יותר ביישומן. הסבר זה תואם את Koichu et al. (2004). המחקר הראה שיפור מובהק בכל ממדי היצירתיות בתוצאות המבחן המבוסס על בעיות שיש להן יותר מדרך פתרון אחת.

העמדות של התלמידים כלפי מתמטיקה השתפרו בכל ההיבטים. התלמידים בקורס ההעשרה הרבו לפתור בעיות, נהנו מתמיכה של מורים טובים, שיפרו את ההישגים והביטחון העצמי שלהם. גורמים אלה יכולים להסביר את השיפור בעמדות. ההוראה הפרונטאלית מושרשת עמוק בשיטות ההוראה,

אך ההשפעה של קורס ההעשרה על דרכי ההוראה היא גדולה. יישום עקרונות הוראה חדשים דורשים מהמורה להבין את חשיבותה ולהרגיש שהוא מסוגל לאמץ אותה, וזה מה שהחוקרת הסיקה מדברי המורים. מורי ההעשרה ציינו כי עברו מכוח מרכזי ש"שולט" בידע למדריכים, בלי חששות לאבד "שליטה" בכיתה. תפקידיהם בשיטה זו היו: הנחיית פעילות מתמטית, הנעת תהליכי חשיבה, שותפות בלמידה ושדרוג תרגילים על ידי הוספת סעיפים שדורשים חשיבה. שיטות ההוראה הפכו ליותר מעניינות ומזמנות את התלמידים לשיתוף פעולה בין אם בהצגות, בפתרון שאלות, בעבודה שיתופית ביניהם ובתחרותיות. מורי ההעשרה הראו מוכנות גבוהה וספרו על חוויות שילוב בעיות העשרה בשיעורים הרגילים שלהם בעקבות קורס ההעשרה.

הקשר של המחקר לחינוך מתמטי, החשיבות ומידת העניין שבו לקהילייה

למחקר המתואר במיצג יש תרומות לחינוך המתמטי במספר נושאים. ביניהם העשרה, פתרון בעיות, יצירתיות ושוויון הזדמנויות. אוכלוסיית המחקר הייתה רחבה. היא כללה תלמידים רגילים ולא רק מחוננים. החשיבות של המחקר לקהילייה היא בכך שפותח קורס העשרה המבוסס על בעיות אתגר, הקורס תורגם גם לערבית.

רשימת מקורות

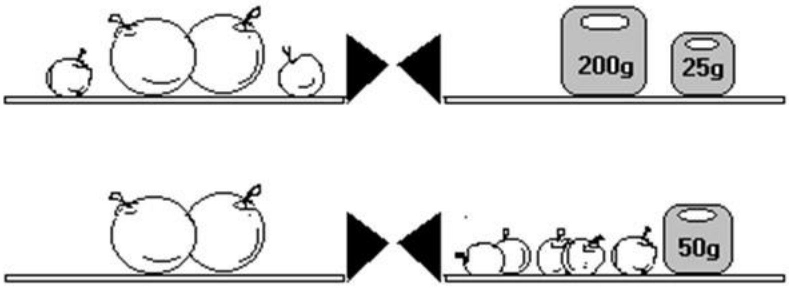
Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall. (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 42-53). Rotterdam, The Netherland: Kluwer.

Koichu, B., Berman. A., & Moore, M. (2004). Promotion heuristic literacy in a regular mathematics classroom. *For the Learning of Mathematics*, 24(1), 33-39.

Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. In R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (Eds), *Creativity in mathematics and the education of gifted students.* (Part IV – Synthesis, Ch. 23, pp. 385411). Rotterdam, the Netherlands: Sense Publisher.

1. בשני הציורים הבאים מתוארת שקילה של תפוחים במאזְניים.

מהו משקלו של תפוח קטן?



2. הרכיבו את כל המערכות האפשריות של יום לימודים אחד,

כך שיתקיימו התנאים הבאים:

- המורה להיסטוריה יכול ללמד בכל אחד משלושת השיעורים הראשונים (אבל רק באחד מהם),
- המורה לספרות יכולה ללמד בשיעור השני או בשיעור השלישי,
- המורה למתמטיקה מוכן ללמד או בשיעור הראשון או בשיעור השני,
- המורה להתעמלות מסכימה ללמד רק בשיעור הרביעי.

3. סוס ופרד הלכו עם משאות כבדים על גבם. בעודם הולכים, התלונן הסוס בלי הפסקה על כובד משקל משאו.

"למה אתה מתלונן?" שאל הפרד את הסוס.

"הרי אם אקח ממך שק אחד, המשא על גבי יהיה כבד פי 2 משלך.

אף אם אתה תיקח ממני שק אחד, יהיה משקל המשא על גב שנינו שווה."

כמה שקים סחב כל אחד מהם?

פיתוח כישורים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי באמצעות גישה אתנו־מתמטית

ח'ירייה מסארוה[1,2], **איגור ורנר**[2], **דאוד בשותי**[2]

[1] המכללה האקדמית הערבית לחינוך בישראל - חיפה; [2] הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל

רקע תיאורטי

הרפורמה בחינוך המתמטי שואפת לענות על הצרכים של הפרט בחברה מודרנית באמצעות התאמת הגישות הפדגוגיות לקידום למידת מתמטיקה. המטרה היא להפוך את המתמטיקה לרלוונטית לדור החדש אשר מעדיף למידה אישית על פני פעילות קבוצתית, ולמידה מעשית על פני לימודים תיאורטיים (Seemiller & Grace, 2016). הדבר בולט במיוחד בהוראת גיאומטריה, כפי שהוא משתקף מתוכניות הלימודים בבית הספר. אתנו־מתמטיקה מציעה גישה להתקדמות בכיוונים אלה אשר עוסקת בתפישות וטכניקות מתמטיות שפותחו בתרבויות שונות כדי לפתור בעיות בחיים האמיתיים (D'Ambrosio, 2001). הגישה משלבת בין מושגים מתמטיים ופרקטיקה מתוך התרבות של הלומד, לבין המתמטיקה הפורמאלית (Rosa & Orey, 2010). יישום הגישה האתנו־מתמטית תורם להבנת מושגים מתמטיים מופשטים (Owens, 2014), הגברת מעורבות הלומדים וגיבוש זהותם התרבותית (Verner, Massarwe, & Bshouty, 2013), הגברת מוטיבציה ועמדות חיוביות כלפי מתמטיקה (Shirley, 2001), חיזוק מיומנויות פתרון בעיות (Amit & Abu Qouder, 2016), ופיתוח מודעות לרב־תרבותיות (Gerdes, 1998).

המחקר המתמשך שלנו העוסק בפעילויות בתחום האתנו־מתמטיקה אשר התחיל בשיעור גיאומטריה בתיכון (Massarwe, Verner, & Bshouty, 2010), הצביע על הפוטנציאל הלימודי שלהם. בעקבות כך, פיתחנו ויישמנו בטכניון, את הקורס "הוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי", המבוסס על הגישה האתנו־מתמטית ואשר התמקד בחקר אורנמנטים גיאומטריים, ניתוח ובנייתם בעזרת סרגל ומחוגה, ופתרון בעיות הקשורות להם. המחקר הצביע על יצירתיות של הסטודנטים (Massarwe, Verner, & Bshouty, 2011), ומעורבות חברתית מוגברת שלהם (Verner, Massarwe, & Bshouty, 2013). בעקבות הצלחת הקורס בטכניון הוזמנו ללמד אותו במכללה האקדמית הערבית לחינוך בחיפה, למורים בפועל אשר לומדים לקראת תואר שני בהוראת מתמטיקה. הפעילויות בקורס במכללה הותאמו לצרכים של מורים בפועל ולפיתוח המקצועי שלהם. הדבר הוביל אותנו ללמוד דרכים חדשות להקניית ידע גיאומטרי לתלמידים ולחקור את הכישורים הדרושים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי ואת הדרך לפתח אותם באמצעות פעילויות אתנו־מתמטיות. בעוד שהמחקר החינוכי מדגיש את האתניות כנכס ומקור להוראה, לא הוצעו המלצות כיצד להשתמש בה בהוראת גיאומטריה, כמו לניתוח ובניית אובייקטים גיאומטריים מורכבים.

התפתחות מקצועית של מורים נתפסת באופן נרחב כבניית ידע באמצעות תרגול הוראה ובאמצעות אינטראקציה עם הסביבה (Zaslavsky & Leikin, 2004). יש לחבר לימודים אקדמיים לתרגול בכיתה, להתמקד בלמידת התלמידים, להתייחס לתכני לימוד ספציפיים ולאפשר דיון ושיתוף פעולה בין מורים (Gellert, 2008). יש חוקרים אשר רואים למידה מקצועית של מורים כפיתוח כישורים

(European Commission, 2013). אנו מתייחסים לכישורים כשילוב המורכב מידע, מיומנויות, הבנה, ערכים, עמדות ורצון המובילים מורים לפעולה יעילה ומשמעותית בתחום שלהם. מטלות ודיונים בקורסים אקדמיים יכולים למלא תפקיד חשוב בפיתוח כישורים של מורים. מתוך ניתוח הספרות בגאומטריה נציין את הכישורים הספציפיים הדרושים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי: פיתוח מודעות והערכה לתפקידה של גיאומטריה בתרבות, פיתוח מיומנויות בנייה גיאומטרית, הדרכת פעילות חקר גיאומטרי ופתרון בעיות הקשורים לארטיפקטים תרבותיים, ותכנון והוראת יחידות הדרכה לחקר גיאומטריה בהקשר תרבותי.

החידוש במחקר זה הוא בכך שהוצאנו מהספרות כישורים הדרושים להוראת גאומטריה בהקשר תרבותי וחקרנו כיצד לפתח כישורים אלו באמצעות קורס המבוסס על הגישה האתנו־מתמטית.

מטרת ושאלת המחקר

מטרת המחקר הייתה לזהות ולנתח כישורים ספציפיים שהמורים צריכים כדי ללמד גיאומטריה בהקשר תרבותי. המחקר עסק בשאלה: כיצד לומדים המורים את הכישורים הדרושים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי?

משתתפי המחקר

המחקר שלנו עקב אחר פיתוח הכישורים הדרושים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי במהלך קורס שנתי בתואר שני במכללה האקדמית הערבית לחינוך, המבוסס על הגישה האתנו־מתמטית והתמקד בחקר אורנמנטים גיאומטריים, בין השנים 2011-2015. בסה"כ השתתפו 71 מורים, כאשר 75% מהם מורים למתמטיקה והשאר מורים למדעים. כל המורים בעלי וותק בהוראה של לפחות שלוש שנים המלמדים בבתי ספר יסודיים, חטיבות ביניים ותיכונים במגזר הערבי. הם דוברי השפה הערבית ובעלי רקע תרבותי מגוון: מוסלמים, נוצרים ודרוזים.

כלי המחקר

עקבנו אחר התפתחות הכישורים הדרושים מתוך השתתפות המורים בכל אחת מהפעילויות השונות בקורס: מילוי שאלון קדם על הניסיון שלהם בלמידת והוראת גיאומטריה, למידת בניות גיאומטריות בעזרת סרגל ומחוגה, התנסות ראשונה בניתוח ובניית אורנמנט גיאומטרי, פיתוח ויישום שאלון עמדות כלפי גיאומטריה לתלמידים שלהם וניתוח תוצאותיו, חקר תרבות מסוימת ובניית גלריה של אורנמנטים גיאומטריים, ניתוח ובנייה בעזרת סרגל ומחוגה של אורנמנט גיאומטרי מתוך התרבות שנבחרה ופיתוח ופתרון בעיות גיאומטריות ברמות שונות הקשורות לאותו אורנמנט, בניית יחידת הוראה על גיאומטריה של אורנמנטים, דיון כיתתי בנושא רב תרבותיות ואתנו־מתמטיקה מתוך הספרות המחקרית, הוראת שיעור גיאומטריה בגישה האתנו־מתמטית בבתי הספר שלהם ודיווח על תוצאות ההוראה. במהלך הקורס נעשו תצפיות ותיעוד לדיון במצגות המורים ורישום הערות להצהרות שלהם. בסוף הקורס המורים ענו על שאלון משוב.

ניתוח נתונים

בהתחלה ניסחנו מחדש את ארבעת הכישורים הדרושים להוראת גיאומטריה בהקשר אורנמנטים וניתחנו את הנתונים כדי לחפש אינדיקציות המצביעות על התפתחותם. נעשה ניתוח לשאלון של קדם הקורס ושאלוני התלמידים. כמו כן נעשתה הצלבה בין הממצאים לבין התשובות לשאלות הפתוחות

בשאלון. מניתוח הנתונים האיכותיים משאלון הקדם של המורים קבלנו תמונה על התפישות שלהם לפני הקורס. הערכת התקדמות המורים בפעילויות שהם בצעו נעשתה ע"י שלושת המחברים תוך שימוש בקריטריונים שנקבעו מראש וגיבוש ממצאים והערכת רכישת הכישורים. כך למשל בבניית אורנמנטים גיאומטריים נבחנו רמת הדיוק והבהירות של הבנייה בעזרת סרגל ומחוגה. בפיתוח ופתרון בעיות גיאומטריות נבחנו בהירותן וניסוח פורמאלי שלהן, איכות ההוכחות הגיאומטריות, והתאמתן לרמת הכיתה שנקבעה.

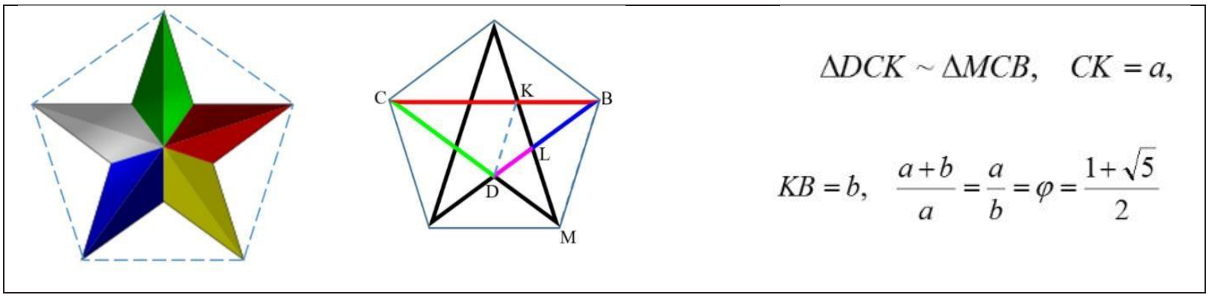
בניתוח המצגות על תרבות נבחנה האסתטיקה שלהן והעושר והאיכות של האורנמנטים שהוצגו. ליחידת הוראת גיאומטריה בהקשר אורנמנטים, נבחנה התאמת היחידה והפעילויות בה לכיתה המיועדת. כמו כן נרשמו הצהרות המורים לגבי הערך של הוראה בגישה האתנו־מתמטית ותוכניות ליישום הגישה בכיתות שלהם. ההתקדמות בפיחות הכישורים הוערך על ידי ניתוח דוחות שהמורים הגישו בסוף הקורס ושאלון המשוב.

ממצאים

הממצאים הצביעו על פיתוח ארבעה כישורים ספציפיים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי: פיתוח המודעות לתפקיד הגיאומטריה בתרבות, הנחיית בניות גיאומטריות, הכוונה לפתרון בעיות גיאומטריות בהקשר לארטיפקטים תרבותיים, ותכנון והוראה של יחידות הוראה על בסיס הגישה האתנו־מתמטית. כמו כן נרשמו אינדיקציות מתוך הקורס המצביעות על פיתוח כישורים אלה. כך למשל, מורה דרוזית חקרה את האסתטיקה של הכוכב, סמל לתרבות שלה, התעקשה לדעת מה מסמל הכוכב ומהן התכונות הגיאומטריות שלו, וכיצד ניתן לבנות אותו באמצעות סרגל ומחוגה. היא גילתה בכוכב את יחס הזהב והוכיחה זאת (**איור 1**). היא השתמשה בדמיון של משולשים כדי לוודא שכל הזוויות הן כפולות של 36°.

איור 1

יחס הזהב בכוכב – סמל התרבות הדרוזית



המורים פיתחו את הכישורים ללמד גיאומטריה בהתבסס על הגישה האתנו־מתמטית בהדרגה במהלך הקורס. השאלון שלפני הקורס שהמורים ערכו בכיתות שלהם סייע להם להבין את הצורך בשינוי בהוראת גיאומטריה. הבנה זו התחזקה כשהתרשמו מיופיים של אורנמנטים מתרבויות שונות והכירו בערך הלמידה איתם. המורים למדו לנתח ולבנות אורנמנטים גיאומטריים על מנת להעביר מיומנויות אלו לתלמידים שלהם. הדיונים בקורס בחומר תיאורטי ומאמרים סייעו למורים להבין ולהפנים מושגים וערכים הקשורים לאתנו־מתמטיקה, רב־תרבותיות ומעורבות בלמידה. הם קיבלו מוטיבציה ליישם את הגישה וללמד שיעורים בגאומטריה של אורנמנטים בכיתות שלהם בבתי ספר מתוך הבנת הערך שלהם. כל המורים דיווחו על הצלחה בשיעורים והציגו תוצאות של שאלון המשוב שהדגיש את

ההתרגשות של התלמידים מפעילויות הלמידה. תוצאות הלמידה של הקורס כללו את הידע, הערכים, המיומנויות, העמדות והרצונות המהווים את הבסיס לכישורים להוראת גיאומטריה בהקשר התרבותי של אורנמנטים. תכנים אלו מהווים עמוד השדרה לפיתוח ארבעת הכישורים הספציפיים להוראת גיאומטריה בהקשר תרבותי. ממצאי המחקר שלנו מצביעים על כך שהמורים רכשו כישורים אלה.

דיון

המחקר שלנו עולה בקנה אחד עם הקריאה להגדרת כישורים הדרושים להוראת מקצועות מתמטיים ספציפיים (Forzani, 2014). תרומת המחקר היא בחקר כיצד ניתן לפתח כישורים להוראת גאומטריה בהקשר תרבותי באמצעות קורס המבוסס על הגישה האתנו־מתמטית. למידה בגישה הזו הדגישה למורים את המאפיינים המיוחדים של הגיאומטריה והתייחסה לאתגרים בהוראת הנושא. המורים פיתחו תפישה לראות באורנמנטים אובייקטים של חקר גיאומטרי. הם למדו ואז לימדו את תלמידיהם לשלב חשיבה פורמלית ושימוש נכון במושגים גיאומטריים בעת ניתוח ובניית אורנמנטים, והוכחות תכונותיהם הגיאומטריות. המחקר המתמשך שלנו הראה שהגישה האתנו־מתמטית יכולה להיות מיושמת ביעילות בקורסים לפרחי הוראה ולמורים בפועל. הקורסים שלנו ענו על המלצותיהם של חוקרים רבים לאפשר למורים לפתח כישורים להוראת גאומטריה בהקשר תרבותי.

רשימת מקורות

Amit, M., & Abu Qouder, F. (2016). Weaving culture and mathematics in the classroom: The case of Bedouin ethnomathematics. In: M. Rosa et al. (Eds.), *Current and Future Perspectives of Ethnomathematics as a Program*. ICME-13 Topical Surveys, 23-50, Hamburg, Germany: Springer Open.

D'Ambrosio, U. (2001). What is ethnomathematics, and how can it help children in schools? *Teaching Children Mathematics, 7*(6), 308-312.

European Commission (2013). Supporting teacher competence development for better learning outcomes. http://ec.europa.eu/dgs/education_culture/repository/education/policy/school/doc/teachercomp_en.pdf.

Forzani, F. M. (2014). Understanding "core practices" and "practice-based" teacher education: Learning from the past. *Journal of Teacher Education*, *65(4)*, 357-368.

Gellert, U. (2008). Routines and collective orientations in mathematics teachers' professional development, *Educational Studies in Mathematics*, *67(2)*, 93-110.

Gerdes, P. (2010). Exploration of technologies, emerging from African cultural practices, in mathematics (teacher) education, *ZDM*, *42(1)*, 11-17.

Massarwe, K., Verner, I., & Bshouty, D. (2010). An ethnomathematics exercise in analysing and constructing ornaments in a geometry class. *Journal of Mathematics and Culture, 5*(1), 1–20.

Massarwe, K., Verner, I., & Bshouty, D. (2011). Fostering creativity through geometrical and cultural inquiry into ornaments. In: B. Sriraman and K.H. Lee (Eds.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics*, pp. 217-241. Sense Publishers.

Owens, K. (2014). The impact of a teacher education culture-based project on identity as a mathematically thinking teacher. *Asia-Pacific Journal of Teacher Education, 42*(2), 186–207.

Rosa, M., & Orey, D. (2010). Culturally relevant pedagogy: An ethnomathematical approach. *Horizontes*, *28*(1), 19–31.

Seemiller, C.; Grace, M. (2016). *Generation Z Goes to College*. Jossey-Bass: NY, USA.

Shirley L. (2001) Ethnomathematics as a fundamental of instructional methodology. *ZDM*, *33*(3), 85-87.

Verner, I., Massarwe K., & Bshouty D. (2013). Constructs of Engagement Emerging in an Ethnomathematically-Based Teacher Education Course. T*he Journal of Mathematical Behavior, 32* (3), 494– 507.

Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional development of mathematics teacher educators: Growth through practice, *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 5-32.

הבניית ההגדרה של סינוס במעגל היחידה בהתבסס על טריגונומטריה במשולש ישר-זווית בסביבה מבוססת GEOGEBRA

ליה נח-סלע, מיכל טבח

אוניברסיטת תל־אביב

רקע תיאורטי

מחקר זה בחן את הבניית הידע לגבי הגדרת סינוס במעגל היחידה בקרב תלמידי כיתה י' הלומדים מתמטיקה ברמה של 4-5 יחידות לימוד. מטרת המחקר היא לבחון כיצד הידע הקיים אצל הלומדים לגבי טריגונומטריה במשולש ישר זווית משפיע על היצירה של הידע החדש לגבי טריגונומטריה במעגל היחידה. בבתי ספר תיכוניים בישראל, באופן מסורתי נלמדים המושגים הטריגונומטריים ראשית בהקשר של משולש ישר זווית. בתום הלימוד של טריגונומטריה במשולש ישר זווית מוצגת לתלמידים ההגדרה של הפונקציות הטריגונומטריות במעגל היחידה, וכך מתבצעת הרחבת ההגדרה, כאשר המערכת שנלמדה כבר מוכללת למערכת רחבה יותר (Chin, 2013).

כאשר מתבצעת הרחבת ההגדרה, היבטים המשותפים למערכת הישנה ולחדשה יכולים לשמש בתור met-before תומכים להרחבה. לעומתם, ידע שנרכש לגבי המערכת הישנה ואינו תקף לגבי החדשה יכול להוות met-before מכשיל, ולהפריע להבניית ידע חדש (Tall, 2013). Chin (2013) מצא שכאשר פרחי הוראה התבקשו לחשב את ערכן של פונקציות טריגונומטריות לזוויות שאינן חדות, חלקם ניסו להיעזר בידע מטריגונומטריית משולשים שהיווה met-before מכשיל. יתרה מזאת, פרחי ההוראה במחקרו של Chin לא יצרו קשרים קוהרנטיים בין טריגונומטרייה במשולש ובמעגל.

גלבוע (2015) חקרה את הבניית ההגדרות של משיק, אסימפטוטה אנכית ופרבולה בקרב תלמידי תיכון. היא מצאה כי גם כאשר התלמידים הבנו מושג, עד אשר התבקשו מפורשות להגדירו, לא הבנו את תפישתו כישות מתמטית מובחנת המאגדת את כל המאפיינים והייצוגים של המושג. Van Dormolen & Arcavi (2000) טוענים כי הבנייה של הגדרות מתוך עשייה ומעורבות אישית עדיפה על פני קבלת ההגדרה מהמורה כמוצר מוגמר, ויש ללמוד את הגדרת המושג באופן חווייתי, מהתנסות הכוללת שני שלבים החוזרים לסירוגין – ראשית הלומד מבצע פעולה, ואז הוא מבצע רפלקציה.

מתודולוגיה

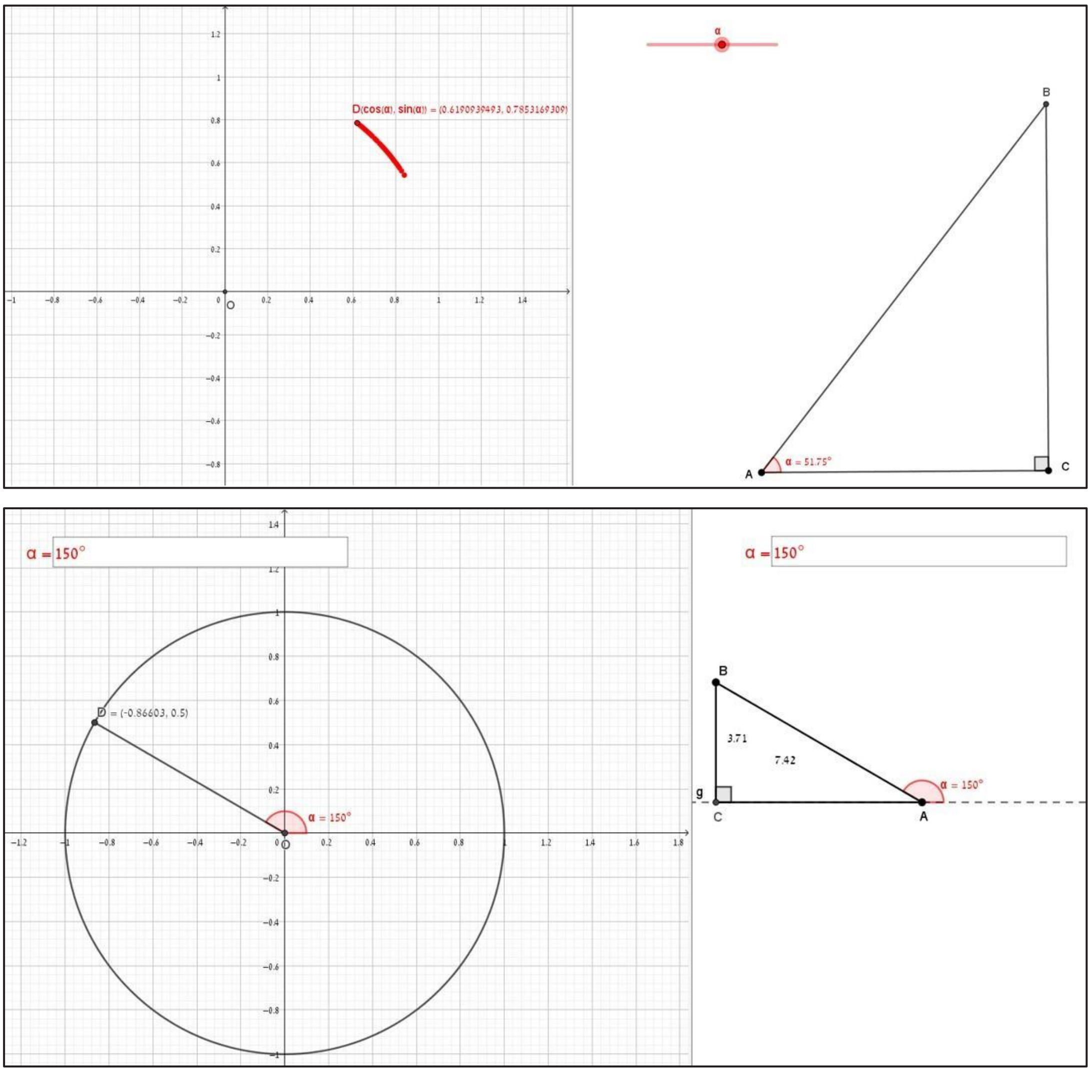
מהלך המחקר

במחקר זה השתתפו שלושה זוגות של תלמידי כיתה י' הלומדים בשתי קבוצות מתמטיקה שונות ברמה של 4-5 יח"ל בבית ספר במרכז הארץ. כל התלמידים למדו בכיתה ט' טריגונומטריה במשולש ישר זווית, והכירו טרם הפעילות את ההגדרה של סינוס בהקשר זה. התלמידים השתתפו בפעילות מעוצבת בקפידה מבוססת GeoGebra שבה הם יצרו את מעגל היחידה בעזרת משולשים ישרי זווית, תוך הרחבה הן של המושג זווית, והן של המושג סינוס. שני יישומוני GeoGebra (**איור 1**) פותחו עבור הפעילות, שנחלקה לשני חלקים. בחלקה הראשון, תלמידים התבקשו לקשר בין משולש ישר זווית דינמי לבין הנקודה המתאימה ברביע הראשון ולזהות את רבע המעגל שהיא יוצרת. בחלקה השני של

הפעילות, תלמידים הרחיבו את תפישתם של מושג הזווית בהקשר של מעגל, ואז הרחיבו את תפישתם של מושג הסינוס על ידי השוואת ערכי סינוס בזוויות שונות והשלמה מנטלית של המעגל. לבסוף, תלמידים השתמשו ביישומון השני על מנת לחשב ערכים שונים של סינוס ולפתור משוואה טריגונומטרית פשוטה. בסוף הפעילות תלמידים התבקשו לכתוב הגדרה של סינוס במעגל.

איור 1

צילומי מסך של יישומוני GeoGebra שפותחו לצורך הפעילות



שאלות המחקר

1. האם תלמידים יבצעו הרחבה של הגדרת הסינוס?
   - לזוויות קהות? לזוויות נישאות? לזוויות גדולות מ־360 מעלות? לזוויות שליליות?
2. האם תלמידים יצליחו להבנות את ההגדרה של הפונקציות סינוס וקוסינוס במעגל היחידה בעזרת משולש ישר זווית?
   - האם ההגדרה של סינוס במשולש ישר זווית תהווה met-before תומך או מפריע להבניה?
   - האם תלמידים יזהו קשר בין סינוס במעגל לבין סינוס במשולש ישר זווית?

ניתוח הנתונים

תהליך הבניית הידע של התלמידים נותח בעזרת מודל RBC (Dreyfus et al, 2015), תוך שימת לב לאופן שבו ידע קודם הנוגע לטריגונומטריה במשולש היווה met-before תומך ומכשיל ליצירת הידע החדש. במהלך הניתוח ניתנה התייחסות למבני ידע שגויים וחלקיים, בפרט בעת הרחבות של הגדרת הסינוס. בעת ניתוח אפוסטריורי של ההבנייה של ההגדרה של סינוס נצפו גם מבני ידע לא מינימליים – הגדרות המכילות מידע יתיר כגון חילוק במספר שהוא זהותית 1, או חיסור של 0. התייחסות מיוחדת ניתנה גם למבני ידע אלה, כפי שיפורט בחלק הממצאים ובדיון.

לאור העובדה שהתלמידים נחשפים לפונקציות הטריגונומטריות במגוון רחב של הקשרים מתמטיים שונים (משולש ישר זווית, שיפוע של ישר במערכת צירים, פתרון משוואות וכו'), הניתוח של מבני הידע הרלבנטיים נעשה לא כעץ היררכי של מרכיבי ידע, אלא כרשת של מרכיבי ידע המחולקים לצבירים על פי ההקשר המתמטי אליו הם משתייכים.

ממצאים

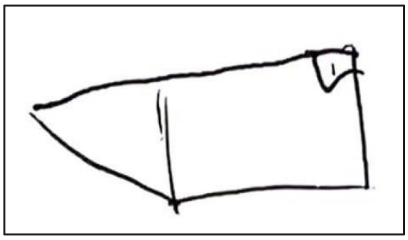
כל התלמידים שהשתתפו במחקר הצליחו לחשב את ערכי סינוס בעזרת מעגל היחידה, בפרט עבור זוויות קהות, זוויות נישאות וזוויות הגדולות מ־360 מעלות. כל התלמידים הצליחו גם למצוא לפחות שני פתרונות של משוואה טריגונומטרית פשוטה, זווית חדה וזווית קהה. שני זוגות של תלמידים מצאו את האופן בו ניתן לייצר את כל הפתרונות החיוביים, מהם אחד מצא גם פתרונות שליליים למשוואה.

בעוד שהשימוש במעגל היחידה להשלמת מטלות חישוב היה יחסית פשוט לתלמידים, המטלה של הגדרת סינוס בהקשר חדש הציגה בפני התלמידים קשיים רבים – "זה כל כך מסובך, כל כך הרבה דברים על הראש שלי. הרבה עומס. הרבה מאוד עומס " [תום]. בפרט במהלך הרחבת ההגדרה של סינוס לזוויות נישאות נמצא כי טריגונומטריית משולשים היוותה met-before מכשיל, שכן במקרה זה ערכי סינוס הינם שליליים, מה שעומד בסתירה לתפישה של סינוס כיחס בין אורכי צלעות – "[...] אבל זה יחס של מרחקים. אני חושב. מרחק לא יכול להיות שלילי " [עידן]. כמו־כן, טריגונומטריית משולשים היוותה met-before מכשיל עבור זוויות שקרניהן מתלכדות עם הצירים, עבורן לא ניתן לבנות משולש ישר זווית מתאים – "סינוס בעצם מתקיים לכל הזוויות, כאילו, כל הזוויות חוץ מ... סינוס אלפא, כאילו אז אלפא חייבת להיות שונה מ: אפס, תשעים, 180, 270, 360 שזה כאילו גם כעיקרון אפס " [תום].

היבט נוסף של ההשפעה של טריגונומטריית משולשים כ־met-before מכשיל הוא שהתלמידים ראו צורך במהלך הפעילות לנסות ולשרטט משולש ישר זווית בעל זווית נוספת שאינה חדה (**איור 2**). יתרה מזאת, השרטוטים הנ"ל שורטטו אחרי שהתלמידים הבנו הרחבה חלקית של סינוס, מה שמלמד על האופי הכפייתי של טריגונומטריית משולשים.

איור 2

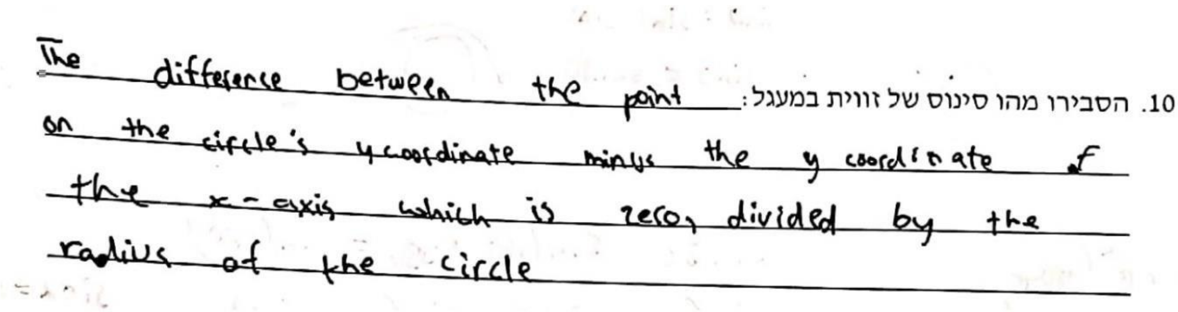
ניסיון של עידן ליצור משולש ישר זווית שאחת מזוויותיו קהה



בנוסף לכך, אף כי כל התלמידים הרחיבו את מושג הסינוס כך שיכלול ייצוג במעגל היחידה, תלמיד אחד לא הצליח לנסח הגדרה של סינוס במעגל, ותלמידה נוספת לא הצליחה לפתח את הגדרתה מעבר לאמירה הלקונית כי סינוס הוא קואורדינטה y. אף על פי כן, יתר התלמידים הצליחו לנסח הגדרה כתובה. ההגדרות שנוסחו לא היו מינימליות והכילו התייחסות לחיסור של אפס או לחילוק באחד, כפי שניתן לראות ב**איור 3**. השימוש בפעולות אלה שאינן נחוצות מתמטית נובע משימוש בטריגונומטריית משולשים שבה ישנה חלוקה של אורך הניצב שמול הזווית באורך היתר. השימוש בהפרש שיעורי y מגיע מחישוב אורך הניצב ברביע הראשון, והחלוקה ברדיוס מקורה בחלוקה ביתר. לפיכך, שימוש בפרוצדורות אלה, שאינן הכרחיות אך נשמרות במעבר מהמערכת המצומצמת של טריגונומטריה במשולש ישר זווית למערכת המורחבת של טריגונומטריה במעגל היחידה, מעיד על השימוש בטריגונומטריית משולשים בתהליך הרחבת ההגדרה כ-met-before תומך (Tall, 2013).

איור 3

הגדרה של איתן לסינוס במעגל. ההגדרה ניתנה באנגלית לבקשת התלמיד, שזוהי שפת אימו



דיון

ההגדרות הלא מינימליות אליהן הגיעו התלמידים מעידות כי הם מצליחים לקשר בין סינוס במשולש ישר זווית וסינוס במעגל. זאת בניגוד לממצאיו של Chin (2013) לפיהם פרחי הוראה התקשו לחבר בין ההקשרים השונים בהם נלמדת טריגונומטריה, ובהלימה לטענתם של Van Dormolen & Arcavi (2000) כי הבנייה של הגדרה מתוך תהליך של התנסות ורפלקציה תוביל להגדרה בעלת משמעות רבה יותר אצל הלומדים. קשר זה מקבל משנה חשיבות לאור האופי הכפייתי של טריגונומטריית משולשים שנצפה במחקר.

מתוצאות המחקר ניתן להסיק כי ההבנייה של התלמידים את ההגדרה וניסוחה בעצמם הובילו להבנייה של מושג מתמטי עשיר יותר, המכיל קשרים בעלי משמעות בין טריגונומטריית משולשים לבין טריגונומטריית מעגלים, בהתאם לממצאיה של גלבוע (2015) לפיהם בקשה מפורשת לניסוח

הגדרה תרמה לשכלול ודיוק המושג המתמטי עבור הלומדים. לפיכך, תהליך הבניית ההגדרות יכול להוות כלי שימושי עבור מורים למתמטיקה. כמו־כן, עבור מורים המלמדים טריגונומטריית משולשים, חשוב שיהיו מודעים לאופן שבו טריגונומטריית משולשים תומכת ומכשילה בהבניית ידע חדש זה.

רשימת מקורות

גלבוע, נ' (2015). *צורך בהגדרה מתמטית והשפעתו על הבנית ההגדרה אצל תלמידי תיכון*. עבודת גמר לקראת התואר "דוקטור לפילוסופיה", אוניברסיטת תל־אביב.

Chin, K. E. (2013). *Making sense of mathematics: Supportive and Problematic Conceptions with special reference to Trigonometry*. Doctoral dissertation, University of Warwick.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context - Theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (pp. 185-217). Dordrecht: Springer, Advances in Mathematics Education series.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically: Exploring the three worlds of mathematics.* Cambridge University Press.

Van Dormolen, J., & Arcavi, A. (2000). What is a circle? *Mathematics in School, 29*(5)*,* 15-19.

פתרון בעיות בגיאומטריה באמצעות שטחים ובשימוש תוכנה דינמית

שולה וייסמן[1,2], **משה סטופל**[2,3]

[1] אוניברסיטת חיפה; [2] האקדמית גורדון; [3] שאנן – מכללה אקדמית דתית לחינוך

מבוא

קיימות אסטרטגיות רבות וכלים מגוונים להוכחה של בעיות בגיאומטריה ולפתרונן. דרכים שנחשבות רגילות משרישות פתרונות טכניים. לעומתן, דרכים לא שגרתיות מאפשרות יוזמות חדשות לדרכי הפתרון ומפתחות יצירתיות. השימוש בדרכים שונות לפתרון בעיה חושף פתרונות מפתיעים ומציג את המתמטיקה כתחום מאתגר (Stupel & Ben-Chaim, 2013; Peled & Leikin,2017).

השימוש במושג השטח בהוכחות גיאומטריות מאפשר לעיתים בנייה של הוכחות אלגנטיות וויזואליות שאת חלקן ניתן להציג ללא מילים והן עשויות לאפשר הבנה קלה יותר לתלמידים (הראל ודרייפוס, 2009). למרות שמושג השטח נקלט בקלות מבחינה אינטואיטיבית השימוש בו להוכחות בגיאומטריה אינו מודגש במידה הראויה, במיוחד בהוראה התיכונית ובקורסי המתודיקה של פרחי ההוראה.

המחקר נעשה במהלך קורס "סדנה להוראת המתמטיקה" בקרב סטודנטים המתכשרים להוראת מתמטיקה, חלקם בעלי רקע אקדמי קודם המשלימים לימודים לשם קבלת תעודת הוראה וכולם למדו קורסי בסיס בגיאומטריה אוקלידית. המחקר עוסק בשימוש בשטח ככלי להוכחה ולפתרון משימות בגיאומטריה. במהלך פתרון המשימות שההוכחה שלהן מסתמכת על חישוב שטחים נעשה שימוש בתוכנה דינמית. הבעיות מדגימות דרכים שונות לשימוש זה בשטח. נציג ממצאים לגבי תפישות הסטודנטים לגבי שימוש בשטח ככלי להוכחת בעיות בגיאומטריה ולגבי עמדתם כלפי שימוש בתוכנה דינמית לבדיקת תכונות גיאומטריות כהכנה להוכחה הפורמלית שכוללת נימוקים כנדרש במתמטיקה. כמו־כן יוצגו מצבים גיאומטריים מעניינים שיש בהם שימור של שטחים או יחסי שטחים תוך כדי ביצוע שינויים דינמיים על ידי גרירת קודקוד ים שכתוצאה מהם משתנים אורכי צלעות וערכי זוויות.

מטרת המחקר

המטרה היא לנתח כיצד סטודנטים להוראת מתמטיקה תופשים את השימוש בשטח ככלי שמסייע בפתרון בעיות בגיאומטריה ולהתחקות אחר עמדתם כלפי שימוש בתוכנה דינמית ככלי־עזר רב עוצמה המאפשר להשיג "סמי־הוכחה" שלמעשה מהווה את היסוד להכנה להוכחה הפורמלית כנדרש.

מתודולוגיה

במחקר השתתפו 26 סטודנטים הלומדים לקראת תעודה להוראת מתמטיקה בחינוך העל-יסודי. הסטודנטים עסקו גם בבעיות המוכרות להם וגם בבעיות מעניינות שהיו בלתי מוכרות להם.

בשלב הראשון הסטודנטים בדקו דוגמאות לקיום התכונה המוצגת בבעיה בעזרת התוכנה Geogebra וביצעו חקר דינמי שכלל גרירת קודקודים בעזרת יישומונים שהוכנו מראש. **בשלב השני** הם התבקשו להוכיח את התכונה ולנמק כל שלב בהוכחה, ו**בשלב השלישי** הרחיבו את התכונה על ידי ביצוע הכללה והעלאת שאלות נוספות שאפשר לשאול.

המחקר מתבסס על שאלון שמלאו הסטודנטים בתום הקורס ועל ראיונות אישיים חצי מובנים שנערכו עם הסטודנטים במהלך פתרון הבעיות בקורס.

ממצאים ודיון

הוצגו לסטודנטים משימות גיאומטריות שונות. הסטודנטים התבקשו לבצע את שני השלבים הראשונים: בדיקת דוגמאות לקיום התכונה בעזרת התוכנה והוכחה פורמלית של התכונה. לאחר מכן התקיים דיון ובו נערך השלב השלישי: הועלו רעיונות להרחבה ושאלות נוספות שניתן לשאול.

בפתרון המשימה הראשונה הסתבר במהלך בדיקת הפתרונות שכל הסטודנטים פתרו את הבעיות שהוצגו להם ללא שימוש בשטח, אף אחד מהם לא הצליח לנצל את הקשר בין התכונות הגיאומטריות לבין השטח. כלומר, ניתן לומר כי הסטודנטים גילו מידה רבה של קיבעון מחשבתי לגבי השימוש בשטח ככלי להוכחה. הוצגה לסטודנטים משימה בעלת מספר דרכי ההוכחה שאחת מהן הדגימה שימוש בשטח. ההוכחה שהייתה אלגנטית, אסתטית וקצרה עוררה הפתעה והתפעמות בקרב הסטודנטים לעומת הוכחות סטנדרטיות שהן בדרך כלל ארוכות ומורכבות יותר.

במשימות הבאות הסטודנטים התבקשו לבצע את השלב השני, ההוכחה הפורמלית, תוך שימוש בשטח. הממצאים מראים את התפלגות הפתרונות של הסטודנטים על-ידי שימוש בשטח או בדרכים אחרות. נציג כמה רעיונות שהועלו בשלב השלישי על ידי הסטודנטים כהצעות לחקירה נוספת.

במהלך הראיונות הסתבר שכל המרואיינים לא חשבו בתחילה לפתור את הבעיות שהוצגו להם על ידי שימוש בשטח ובמהלך הקורס כשנחשפו לאפשרות זו חיפשו דרך פתרון המערבת שימוש בשטח. ניתן לומר כי למרות שבתחילה הסטודנטים גילו מידה רבה של קיבעון, בהמשך לאחר שנחשפו לאסטרטגיות של שימוש בשטח להוכחה הם נקטו יותר ויותר בגישה זו כאשר נעזרו בתוכנה הדינמית לגילוי קשרים בין שטחים. הסטודנטים העידו על הפתעתם מהדרך הקצרה והאסתטית של ההוכחות בעזרת שטחים לעומת ההוכחות בדרך סטנדרטית שבדרך כלל היו ארוכות יותר.

סיכום

המחקר עוסק בבעיות בגיאומטריה שאפשר להוכיח אותן בעזרת אסטרטגיות שונות המערבות שימוש בשטח, בעמדות של סטודנטים כלפי השימוש בשטח ובעמדות שלהם כלפי שימוש בתוכנה דינמית כהכנה לשלב ההוכחה.

כל הבעיות שהוצגו ניתנות לפתרון בדרך קצרה ואלגנטית על ידי שימוש בשטח באסטרטגיות שונות: חישוב שטח באופנים שונים, השוואה בין שטחים, שימוש ביחסי שטחים וחישוב שטח כסכום שטחים שמרכיבים אותו. בפתרונות המערבים שימוש בשטח נמצא כי לרוב היה אלמנט של הפתעה.

עמדתם של הסטודנטים כלפי השימוש בתוכנה הדינמית כהכנה להוכחה הפורמלית הייתה חיובית מאוד, הם הסתייעו באפשרות של גרירה כדי לראות דוגמאות רבות להשערות שהעלו. כמו כן הם פתרו במהלך הקורס יותר בעיות על ידי שימוש בשטח והעידו כי החשיפה לשימוש בשטח ככלי לפתרון העשיר את הידע המתמטי שלהם ואת הגילוי של היופי של המתמטיקה.

רשימת מקורות

וייסמן, ש', סטופל, מ' וסיגלר, א' (2018). העצמת השימוש בשטח להעשרת "ארגז הכלים" לפתרון בעיות והוכחות במתמטיקה. על"ה – עלון למורי המתמטיקה, 56, 31-38.

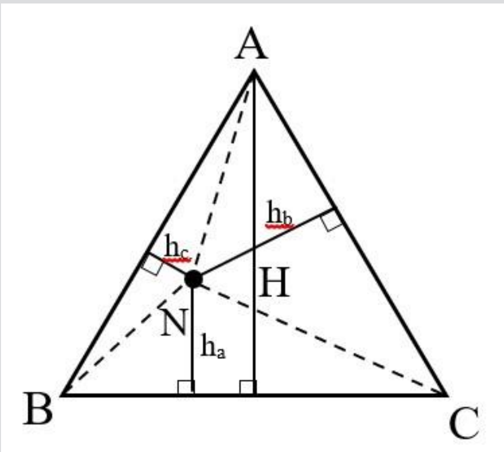
הראל, ר', דרייפוס ט' (2009). הוכחות ויזואליות: השקפותיהם ואמונותיהם של התלמידים. על"ה – עלון למורי המתמטיקה 41, 12-19.

Peled, I., & Leikin, R. (2017). Using variation of multiplicity in highlighting critical aspects of multiple solution tasks and modelling tasks. In *Teaching and Learning Mathematics through Variation* (pp. 341-353). SensePublishers, Rotterdam.

Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*, *9*(2), 86-108.

נספח: דוגמה לבעיה

הוכח כי במשולש שווה־צלעות, סכום המרחקים של נקודה N כלשהי מצלעות המשולש שווה לגובה של המשולש.

סימון: a אורך צלע המשולש H גובה המשולש צריך להוכיח: $h_a+h_b+h_c=H$ הוכחה: $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle BNC}+S_{\triangle ANC}+S_{\triangle ANB}$ $\Downarrow$ $\frac{a\cdot H}{2}=\frac{a\cdot h_a}{2}+\frac{a\cdot h_b}{2}+\frac{a\cdot h_c}{2}$ $\Downarrow$ $H=h_a+h_b+h_c$	

הקשר בין ההבנה החזותית והמופשטת, ככלי שעתיד לפתח משמעותית את התפיסה והראייה המרחבית בקרב הלומדים

לאה דוראל, המכללה האקדמית בית ברל

מבוא

הנדסת המרחב נמנית על התחומים הרב־תכליתיים במתמטיקה, והיא קשורה קשר הדוק לפיתוח החשיבה המתמטית והאינטלקטואלית. חשיבה מרחבית היא הכרחית במגוון תחומי חיים, כגון הנדסה אזרחית, הנדסה מכנית, עיצוב פנים, עיצוב גרפי ועוד רבים אחרים.

הוראת התחום של הנדסת המרחב מתבססת כיום בעיקר על לוגיקה מתמטית – ניסוחים וטענות מדויקות. דרך הוראה זו מאפשרת ללמד ולהדגים הגדרות, אקסיומות או טענות, אך היא עושה זאת ללא התייחסות מספקת לאספקט החזותי, המאפיין את תחום ההנדסה. גם כאשר נעשים ניסיונות להציג אובייקטים הנדסיים באופן חזותי, הם מוצגים באופן סטטי ודו־ממדי.

השימוש בכלים טכנולוגיים לצורך הצגת אובייקטים הנדסיים, אשר מאפשר מפגש עם אובייקטים הנדסיים בתלת- ממד, ובאופן של התנסות פעילה, עשוי להועיל לבניית בסיס דידקטי ליצירת והגדרת מושגים הנדסיים, ולסייע רבות בתהליך רכישת מושגים אלה.

המחשה של האובייקטים והמושגים הגיאומטריים באופן חזותי, בעזרת כלים טכנולוגיים, חשובה לכל אורך תהליך הלמידה, כבר מראשיתו. הוראה אשר נעזרת משלבת בתוכה המחשה ויזואלית מגדילה משמעותית את הסיכוי לפיתוח רמה גבוהה של חשיבה, והטמעה טובה של מושגים הנדסיים בקרב התלמידים.

חשיבות שילובם של כלים טכנולוגיים בהוראת הנדסת המרחב

הנדסת המרחב, למרות נחיצותה במגוון תחומים בחיי היומיום, אינה תופסת מקום משמעותי די הצורך בהוראת המתמטיקה כיום. בוגרי תיכון, גם אם למדו מתמטיקה בהיקף מוגבר של 4 או 5 יחידות לימוד, אינם שולטים כיאות בתחום הנדסת המרחב עם תום לימודיהם, וגם באקדמיה, תחום הנדסת המרחב נלמד באופן חלקי וללא העמקה, ולרוב כחלק מעיסוק בפתרון בעיות בתחומים אחרים, ולא כתחום העומד בפני עצמו.

לאור העומס הקיים ממילא בתוכניות הלימוד במתמטיקה, יקשה עלינו להקדיש שעות נוספות להנדסת המרחב. עם זאת, שילוב אמצעים טכנולוגיים בהוראה עשוי לייעל משמעותית את אשר ניתן להשיג במסגרת השעות הקיימות. תוכנות דינמיות ממוחשבות, אשר מציעות לתלמידים הזדמנות לחוות את המושגים והאובייקטים ההנדסיים באופן ויזואלי, תלת-ממדי, עשויות לחולל שינוי משמעותי בהוראת הנדסת המרחב, ולהביא לביסוס הבנה עמוקה יותר של מושגים ואובייקטים הנדסיים, ולשיפור בתפיסה המרחבית של התלמידים.

חוקרים בתחום הוראת המתמטיקה מייחסים חשיבות רבה לתרומה האפשרית של אמצעים טכנולוגיים לתהליך הלמידה, כדרך לאפשר לתלמידים לראות ולחוות את המושגים והאובייקטים המתמטיים באופן מלא ותוך התנסות פעילה, ולא רק הקשבה סבילה. Mason (2003), כמו גם

Owens ו־Clements (1998), מדגישים את הקשר בין שימוש בדימויים חזותיים בתהליך ההוראה, לבין ידע קונצפטואלי בהנדסה. Olive ו-Makar (2010) מייחסים חשיבות רבה לאמצעים טכנולוגיים בהוראה, וטוענים כי, לאור הקשר ההדוק בין ידע מתמטי לפרקטיקה מתמטית, התנסות מעשית באמצעים אלה תומכת באופן משמעותי ברכישת ידע מתמטי. Farrell (1996) ו־Makar ו-Confrey (2006) טוענים כי טכנולוגיות עשויות לשנות את פני הוראת המתמטיקה בבתי-הספר, מאחר שהן מציעות לתלמידים הזדמנות ללמידה עצמאית תוך התנסות פעילה: הם יכולים לבדוק השערות, לחקור ולפתור בעיות, ובדרך זו להפיק ידע מתמטי חדש מבחינתם.

טכנולוגיות עכשוויות מאפשרות לתלמידים לבנות בקלות אובייקטים הנדסיים כגון משטחים וגופים, ואז גם להזיז, לסובב ולשקף אותם. כמו כן, שימוש יעיל בתוכנות ממוחשבות עשוי לעורר בתלמידים שאלות, ולהגדיל את הסיכוי לדיון בשאלות אלה, ולכן גם להעמקה משמעותית יותר בחומר הנלמד. לסיכום, ניתן להסיק כי השימוש בטכנולוגיות, בשילוב שיטות הוראה מסורתיות, מסתמן כאופן היעיל ביותר להוראה של הנדסה מרחבית.

תוצאות השוואה בין הוראה מסורתית להוראה המשלבת תוכנה דינמית

במהלך קורס חדו"א באחד המוסדות האקדמיים המובילים בארץ, החליט אחד המתרגלים להיעזר בכלי טכנולוגי דינמי לצורך ההוראה. השוואה בין קבוצת התרגול שלו, לבין קבוצת תרגול נוספת, בה התבצעה הלמידה באופן מסורתי וללא כלים טכנולוגים, ממחישה את חשיבותם של כלים טכנולוגיים בהוראת הנדסת המרחב.

תלמידי הקורס, אשר נמצאים בשנתם הראשונה ללימודים בפקולטה להנדסה, הינם בוגרי 4 או 5 יחידות לימוד במתמטיקה, אשר סיימו את מבחני הבגרות במתמטיקה בציונים גבוהים. במרבית המקרים, תלמידים אלה אינם מתקשים ברכישת חומר חדש, אך למרות זאת, הראיה המרחבית שלהם אינה מפותחת די הצורך, ואולי אף לוקה בחסר.

הסטודנטים, כ־80 במספר, חולקו לשתי קבוצות תרגול. כאמור, בקבוצה אחת, המתרגל מצא לנכון להיעזר בכלי טכנולוגי (desmos) על מנת להמחיש לסטודנטים את האובייקטים ההנדסיים (בעיקר משטחים ממעלה שניה). המתרגל אף עודד את התלמידים להתנסות באופן עצמאי באמצעות התוכנה, בנוסף לפתרון תרגילים באופן המסורתי. קבוצה זו תיקרא להלן "קבוצת תרגול 1". בקבוצה השנייה, המתרגל לימד באופן המסורתי – חזר על החומר שנלמד בהרצאה, והדריך את התלמידים בפתרון תרגילים בנושאים שנלמדו. קבוצה זו תיקרא להלן "קבוצת תרגול 2".

מבדיקה של תוצאות מבחן שנערך בקורס, עולים הבדלים משמעותיים בין שתי הקבוצות, מבחינת ההישגים ואיכות הפתרונות בשאלות במגוון נושאים הקשורים להנדסת המרחב: משטחים ממעלה שנייה, אינטגרלים (כפולים ומשולשים) ושימושם, אינטגרלים קוויים ואינטגרלים משטחיים מסוגים שונים. לא נמצאו הבדלים משמעותיים בין שתי הקבוצות בנושאים שאינם קשורים להנדסת המרחב: דיפרנציאביליות של פונקציה, מציאת קיצון או התכנסות טורי פונקציות.

נבחן את הישגי קבוצות התרגול בשתי שאלות מתוך המבחן, אשר יובאו להלן. הסטודנטים לא נחשפו לשאלות אלה קודם לכן, בשיעורים או בתרגול.

שאלה 1

יהיה S חלק ממשטח $x^2+y=1$, $z\ge 0$ הנמצא מתחת למישור $z=x$ באוקטנט הראשון ($x\ge 0, y\ge 0, z\le 0$). מצא את שטח הפנים של המשטח S.

לצורך פתרון השאלה, נדרש שימוש בנוסחה לחישוב שטח פנים. בנוסף, וחשוב לא פחות, נדרשת ראיה מרחבית מפותחת על מנת לייצר בדמיון תמונה ויזואלית של המשטח המבוקש. שאלה זו ניתנה כשאלת בחירה מבין 2 שאלות. בקבוצת תרגול 1, רוב הסטודנטים בחרו לענות על שאלה זו, והצליחו לתת פתרונות אשר משקפים הבנה טובה של הנושא. לעומת זאת, בקבוצת תרגול 2 רק מעטים בחרו בשאלה זו, ומתוכם, הרוב נכשלו בהתמודדות איתה, ולא הצליחו לצבור ניקוד על תשובתם לשאלה. הציון הממוצע על שאלה זו היה 4.9 מתוך 15 בקבוצת תרגול 1, ו־2 מתוך 15 בקבוצת תרגול 2.

שאלה 2

חשב את $\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl$ כאשר L מעגל המתקבל מחיתוך של ספרה $x^2+y^2+z^2=R^2$ ומישור $y=z$.

אם מגיעים להבנה שהעקום שמתקבל הוא מעגל עם מרכז בראשית הצירים ורדיוס $\sqrt{R}$, הדרך קצרה מאוד לפתרון, מאחר שכל מה שנדרש הוא חישוב היקף של מעגל עם רדיוס נתון.

$$\int_L \sqrt{x^2+2z^2}\,dl=\int_L \sqrt{R}\,dl=2\pi R$$

בקבוצת תרגול 1, למעלה מ־90% מהתלמידים פתרו את השאלה באופן שהוצג לעיל, וקיבלו ניקוד מלא עבור השאלה. בקבוצת תרגול 2, לעומת זאת, כ־35% בלבד פתרו את השאלה באופן זה, ו־50% מהתלמידים בצעו פרמטריזציה של העקומה והציעו פתרון אשר היה נכון, אמנם, אך היה ארוך מהנחוץ, ולעתים לווה גם בטעויות חישוב.

סיכום

כאמור, פיתוח חשיבה מרחבית לא זוכה להתייחסות מספיקה בלימודי הנדסה באקדמיה. ספרי לימוד מציגים לרוב את החומר בצורה אנליטית, תוך הדגשת הרכיב הלוגי וללא התייחסות מספיקה לרכיב של פיתוח ראיה מרחבית. כך, למעשה, הכלים הפדגוגיים העומדים לרשותנו בהוראת הנדסה מותירים אספקט מהותי של הלמידה ללא התייחסות מתאימה.

במקרים רבים, כאשר נעזרים בהדמיה ממוחשבת של חומרי הלימוד, התמונות מציגות אובייקטים הנדסיים אשר הועתקו מהנייר אל מסך המחשב, ולכן נותרו דו-ממדיות וסטטיות. שילוב כלים טכנולוגיים בהוראה, באופן אשר יאפשר לתלמידים התנסות פעילה עם אובייקטים הנדסיים בתלת-ממד, עשוי לחולל שינוי מהותי באופן ההוראה של הנדסת המרחב, טענה שזוכה לתימוכין מתוך הספרות המקצועית בתחום הוראת המתמטיקה, ומתוך ההשוואה אשר הובאה לעיל, בין הוראה מסורתית לבין הוראה המשלבת כלי טכנולוגי. סביר להניח כי שילוב כלים טכנולוגיים בהוראה של הנדסת המרחב כבר בשלבים ראשונים של הלמידה, בחטיבות הביניים, עשוי לתרום להנחת יסודות בפיתוח ראיה מרחבית, ולעורר בתלמידים יותר עניין וסקרנות ללמידה.

עבודה זו מנסה להבהיר את אופי הקשר בין חשיבה חזותית לחשיבה מופשטת, ואת חשיבותו. מתן התייחסות ראויה לשני היבטים אלה תסייע משמעותית לפיתוח חשיבה מרחבית בתלמידים.

רשימת מקורות

Farrell, A. M. (1996). Roles and behaviors in technology-integrated precalculus classrooms. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(1), 35–53.

Makar, K., & Confrey, J. (2006). Dynamic statistical software: How are learners using it to conduct databased investigations? In C. Hoyles, J. Lagrange, L. H. Son, & N. Sinclair (Eds)*, Proceedings of the 17th Study Conference of the International Commission on Mathematical Instruction*. Hanoi Institute of Technology and Didirem Université. Paris.

Mason, J. (2003). Structure of attention in the learning of mathematics. In J. Novotná (ed.), *Proceedings, International Symposium on Elementary Mathematics Teaching* Prague: Charles University.

Olive, J., & Makar, K., with V. Hoyos, L. K. Kor, O. Kosheleva, & R. Straesser (2010). Mathematical knowledge and practices resulting from access to digital technologies. In C. Hoyles & J. Lagrange*, Mathematics education and technology – Rethinking the terrain*. The 17th ICMI Study. New York: Springer, 133-177

Owens, K. & Clements, M. (1998). Representations used in spatial problem solving in the classroom, *Journal of Mathematical Behavior, 17* (2), 197-.812

טיפוח "הכוונה דואלית שיתופית" ללמידה והוראת המתמטיקה בקרב לומדים צעירים

ירון אמיגה, ברכה קרמרסקי

אוניברסיטת בר־אילן

מבוא

התפתחות הידע בימינו, מחייבת את הלומדים להחזיק במיומנויות **"לומדים לחיים"**, **הכוללות אוריינות מתמטית** המוגדרת כיכולת *להבין, לנסח, לתאר, לפרש, להסביר ולעסוק* בפתרון בעיה מתמטית המתאימה במגוון הקשרים לחיי הלומד, **ויכולת למידה שיתופית** עם אחרים על מנת לקבל החלטות מבוססות עצמיות/שיתופיות (PISA, 2015). בפיתוח האוריינות המתמטית מומלץ להתייחס לפתרון בעיות כאל ***שיח בהיבט תוכני***, הכולל העצמת יכולת *ההצדקה וההנמקה* של תהליכי ביצוע פתרון בעיות באופן שיתופי, ובהיבט ***תקשורתי המוביל להבנה שיתופית***, ומעודד את הלומדים להביע ולנמק את רעיונותיהם, להיות ***קשובים לעמיתים*** ולהתחשב בפרספקטיבה של האחר, כדי להבין את הרעיונות של אותם עמיתים (National Research Council, 2015).

המחקר הנוכחי כולל טיפוח למידה עצמית/שיתופית בין **זוגות של לומדים** בעת פתרון בעיות אורייניות, באמצעות תמיכה לשיתופיות באופן הדדי/דואלי (1) **אישית** להעצמה של מיומנויות למידה, (2) **שיתופית** להעצמה תקשורתית בין אישית באמצעות מתן אסטרטגיות שיעודדו שיח מתמטי תוכני ותקשורתי בין לומדים.

מיומנויות אלו אינן נרכשות באופן ספונטני, ועל כן נדרשת **"הכוונה ללמידה שיתופית"** שמרכיביה מתאימים לתיאוריית ההכוונה העצמית (Zimmerman, 2008) תוך חלוקה לשני היבטים: (1) **מטה-קוגניציה** - ידע של האדם על התהליכים והתוצרים הקוגניטיביים שלו עצמו, או על כל הקשור בהם, למשל התכונות הרלוונטיות לפתרון ופיקוח פעיל על תהליכים אלה. (2) **מודעות רגשית - חברתית** אלו מחשבות ורגשות שמתחוללות ברגע נתון והשפעתן על אירוע שמתרחש באותו רגע (Kaunhoven & Dorjee, 2017). **על אף החשיבות התיאורטית שניתנה לשילוב המפורש של היבט המטה-קוגניציה הנחשב כ"תבונת הראש" והיבט רגשי-חברתי הנחשב כ"תבונת הלב"** בתהליך הכוונה עצמית בלמידה, מרבית המחקרים נעשו בהיבט המטה-קוגניציה ופחות בהיבט הרגשי-חברתי ובשילוב ביניהם ובוודאי שלא בלמידה שיתופית תחת הגישה של "הכוונה ללמידה שיתופית".

הספרות העוסקת בתמיכה לשיתופיות באופן הדדי/דואלי, מתייחסת לתרחישים שמפעיל אחד מבני הזוג באופן יזום וגלוי, לשם טיפוח מטה-קוגניציה בלמידה באופן עצמי בעת למידה שיתופית (Kramarski & Kohen, 2017). לדעת אותם חוקרים, יחיד שמסייע לעמית בעת למידה שיתופית צריך **לבצע תשאול, גישוש ורפלקציה עצמית** על תהליך החשיבה שלו, בעת הסיוע ולאחריו, ואף להיות קשוב לדברי האחר, לאפשר לו זמן תגובה ולקיים עמו שיח **בהיבט תוכני**, להעצמת יכולת ההצדקה וההנמקה של תהליכי הביצוע של כל אחד מהם, **ובהיבט תקשורתי**, הכולל עידוד להבעת רעיונות, להקשבה ולהתחשבות בפרספקטיבה ובתפיסה של כל אחד מהם. החוקרים מציינים שלקיחת יוזמה של היחיד לסיוע לעמית באמצעות מתן שאלות עצמיות באופן רציף ומותאם, לקביעת

מטרות (תכנון), פעולות (ביצוע ופיקוח) **וה**ערכה (רפלקציה) בזמן למידה שיתופית, מסייעת להעצמת מטה-קוגניציה בלמידה באופן דו-כיווני, הן של היחיד והן של העמית. עם זאת, התהליכים אינם נרכשים באופן ספונטני אצל צעירים ויש צורך בתמיכה והכוונה יזומה בעת למידה שיתופית (Hattie & Yates, 2014).

מהספרות נראה כי חקר הכוונה עצמית בהיבט רגשי-חברתי מועט בהשוואה לחקר הכוונה המטה-קוגניציה בלמידה שיתופית. לאחרונה חלה התעניינות גוברת בהשפעת ההיבט הרגשי-חברתי בלמידה שיתופית. ואף נבחנה ההשפעה של היבט זה על האינטראקציה השיתופית והשפעתן של רגשות שלילים על התקשורת הבינאישית (Jarvela et al., 2013). **אולם המחקר האמפירי על הרגשי-חברתי עדין מוגבל ופחות ידוע, כיצד הכוונה עצמית בלמידה שיתופית משתנה או מתפתחת** במהלך דואלי שיתופי. בפרט **טרם נבדק אפקט השילוב וההשפעה ההדדית של שני ההיבטים זה על זה בעת למידה שיתופית.**

המחקר מכוון לשתי מטרות מרכזיות:

1. **פיתוח תוכנית התערבות משולבת מטה-קוגניטיבית ורגשית-חברתית** בקרב לומדים צעירים (כיתות ה) בגישת "הכוונה ללמידה שיתופית" המכוונת באופן "הדדי/דואלי" להכוונה עצמית והכוונת השותף בפתרון הבעיה.
2. **חקר הערך המוסף של התוכנית המשולבת** בפתרון בעיות מתמטיות אותנטיות בנושא שברים באופן שיתופי, על מכלול שני ההיבטיים (מטה-קוגניציה ומטה רגשית-חברתית) תוך השוואה לתוכנית המתמקדת בהיבט מטה-קוגניטיבי בלבד, ולקבוצת ביקורת.

משתני המחקר

1. אוריינות מתמטית,
2. תהליכי שיח מתמטי תוכני ותקשורתי
3. היבטי ההכוונה : מטה-קוגניציה ומודעות רגשית-חברתית

כלי מחקר

נבנו, **1) סט משימות מתמטיות** העונה להגדרת האוריינות המתמטית. **2) מחוונים להערכת האוריינות המתמטית** של הלומדים בעת פתרון בעיות, **ונערך ניתוח השיח המתמטי תוכני ותקשורתי 3) סרגלי שיפוט למעקב אחר מחשבותיו ורגשותיו** של הלומד בהתייחסות עצמית/חברתית לשני ההיבטים מטה-קוגניציה ומודעות רגשית-חברתית.

שאלות המחקר

1. האם יימצאו הבדלים בהישגים **בפתרון בעיות אורייניות מתמטית** בין קבוצות המחקר בשלושה זמני מדידה: *לפני, במהלך ובסיום ההתערבות*?
2. האם יימצאו הבדלים **במיומנויות "הכוונה ללמידה שיתופית"** בין קבוצות המחקר במהלך פתרון שמונה משימות בזמני מדידה שונים ובהשוואה לקבוצת ביקורת?

שיטה

מדגם

48 תלמידים (בנים ובנות) מכיתות ה שובצו באקראי בשלוש קבוצות (16 תלמידים בכל קבוצה).
ק1: טיפוח "**הכוונה ללמידה שיתופית**" המשלבת היבטים מטה-קוגניטיבים ורגשיים-חברתיים.
ק2: טיפוח "הכוונה ללמידה שיתופית" בהיבט *מטה-קוגנטיבי*.
ק3: ביקורת **ללא טיפוח** שיתופי במסגרת פתרון בעיות.

תוכנית ההתערבות

תשעה מפגשים כפולים, ביצוע משימות אוריינות מתמטיות **באופן שיתופי בזוגות**, תוך יישום ההיבטים הרלוונטיים. בשילוב עם כרטיסיות ניווט ופעלי עזר, שאלות להכוונה עצמית (מה? למה? איך? מתי?) וסרגלי שיפוט ללמידה עצמית/שיתופית לשם התרגול לשיתופיות באופן דואלי.

כלי המחקר

מבחני הישגיים, מילוי סרגלי שיפוט לתיעוד תהליכי "הכוונה שיתופית" **וניתוח פתרון בקול ובכתב** של תהליכי שיח תוכני ותקשורתי באמצעות מחוון שנבנה ומתייחס למרכיבים מטה-קוגנציה ורגשי/חברתי. מהימנות בין שופטים להערכת הפתרונות בקול הניבה הסכמה של 88%.

ממצאים (חלקיים)

לניתוח הממצאים נערכו סדרת ניתוחי שונות דו כיווניים, זמן x קבוצה, עם מדידות חוזרות לזמן המדידה וניתוחי השוואת צמדים עם התאמה להשוואות מרובות.

שאלת מחקר 1

דפוס הממצאים מצביע על **שיפור מובהק בהישגי הלומדים** בין המדידה לפני ההתערבות לבין המדידה בסיום ההתערבות.

1. **במהלך ההתערבות ובסיומה**, הישגי הלומדים בקבוצה המשולבת ובקבוצת המטה-קוגניציה היו גבוהים באופן מובהק בהשוואה להישגי הלומדים בקבוצת הביקורת.
2. **במהלך ההתערבות** לא נמצא הבדל מובהק בהישגי הלומדים בין הקבוצה המשולבת לבין קבוצת מטה-קוגניציה. משולבת= מטה-קוגניטיבית >ביקורת
3. **בסיום ההתערבות** הישגי הלומדים **בקבוצה המשולבת** היו גבוהים באופן מובהק בהשוואה ללומדים בקבוצת המטה-קוגניציה. **משולבת**> מטה-קוגניטיבית >ביקורת

ממצאי המחקר מתיישבים עם ממצאים קודמים (Zimmerman, 2008) ששיפוט והערכת ביצוע פתרון בעיות באופן יעיל על ידי לומדים יביאו לשיפור בהישגים. עם זאת, ממצאי המחקר רומזים שהשיפור בהישגי הלומדים **בקבוצה המשולבת** לא נבדלו באופן מובהק במהלך ההתערבות מהשיפור **בקבוצת המטה-קוגניציה** אלא רק בסיומה. **ייתכן שתהליך שיפור האוריינות ארוך יותר**, בהמשך למחקרים (Kaunhoven & Dorjee, 2017) שטוענים שיש לטפח תחילה את ההיבט הרגשי והשליטה במודעות רגשית עצמית כדי שיובילו למוכנות ולביצוע פעולות מטה-קוגנטיביות.

שאלת מחקר 2

מיומנויות הכוונה דואלית שיתופית על שני מרכיביה (מטה-קוגניציה ורגשי-חברתי), נבדקה בשני אופנים ובשמונה משימות:

אופן א': מילוי סרגלי שיפוט נקודתי בזמן אמת (self-calibration)

מרכיב מטה-קוגניציה: במשימות המורכבות – ממוצעי **שיפוט מטה-קוגניציה** בזמן אמת בקבוצה המשולבת ובקבוצת מטה-קוגניציה **היו גבוהים באופן מובהק** בהשוואה לממוצעי מדד זה בקבוצת הביקורת. אך, הקבוצה המשולבת **לא נבדלה** באופן מובהק מקבוצת מטה-קוגניציה.

משולבת= מטה-קוגניטיבית

מרכיב רגשי-חברתי: במשימות המורכבות - ממוצעי **שיפוט רגשי-חברתי** בזמן אמת בקבוצה המשולבת ובקבוצת מטה-קוגניציה **היו גבוהים באופן מובהק** בהשוואה לממוצעי מדד זה בקבוצת הביקורת. כמו כן, ממוצעי שיפוט רגשי-חברתי בזמן אמת בקבוצה המשולבת **היו גבוהים באופן מובהק** בהשוואה לממוצעי שיפוט זה בקבוצת מטה-קוגניציה.

משולבת> מטה-קוגניטיבית >ביקורת

אופן ב': תיעוד עצמי בקול ובכתב בזמן אמת (Self-documentation)

מרכיב מטה-קוגניציה: במשימות המורכבות, ממוצעי תיעוד מטה-קוגניציה בזמן אמת בקבוצה המשולבת ובקבוצת מטה-קוגניציה **היו גבוהים באופן מובהק** בהשוואה לממוצעי מדד זה בקבוצת הביקורת. עם זאת, הקבוצה המשולבת **לא נבדלה באופן מובהק** מקבוצת מטה-קוגניציה.

משולבת= מטה-קוגניטיבית >ביקורת

מרכיב רגשי-חברתי: בכלל המשימות המורכבות והפרוצדורליות, ממוצעי תיעוד רגשי-חברתי בזמן אמת בקבוצה המשולבת ובקבוצת מטה-קוגניציה היו גבוהים באופן מובהק בהשוואה לממוצעי מדד זה בקבוצת הביקורת. כמו כן, ממוצעי תיעוד רגשי-חברתי בקבוצה המשולבת היו גבוהים באופן מובהק בהשוואה לממוצעי מדד זה בקבוצת מטה-קוגניציה.

משולבת> מטה-קוגניטיבית >ביקורת

הממצאים מתיישבים עם מחקרים שטוענים כי לומד שמגלה תשומת לב רבה למה שקורה ברגע נתון יהיה בעל נטייה רגשית חיובית כלפי ביצוע משימה, ולכן יגדיל את המאמץ, יפחית את החרדה, יהיה מודע לפעולותיו ולמחשבותיו ויחזק מיומנויות מטה-קוגנטיביות (Bryce et al., 2015). על כן, דפוס הממצאים מעיד שנדרשת העצמה ופיתוח מודעות, והתייחסות רגשית עצמית/חברתית שהיא אינה ספונטנית ואינה תהליך מובנה וברור. לכן, תחילה יש לטפחה כדי שתתן מענה לקושי הקיים ותשפיע ותנהל יחסים "הדדים" איכותיים עם תהליכים מטה-קוגניטיבים.

המלצות למחקר המשך

שיטת ההתערבות במחקר תוכל לשמש בסיס להכשרת תלמידים למיומנויות חשיבה אורייניות הנדרשות במאה ה־21, וזאת באמצעות שילוב של משימות שיתופיות, הכוללות פיתוח "הכוונה דואלית שיתופית", על כן, אנו ממליצים להמשיך לבחון את השיטה במחקרי אורך, בגילאיים שונים ובמספר תחומי דעת.

רשימת מקורות

Ball, D. L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 132-144.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Bryce, D., Whitebread, D., & Szucs, D. (2015). The relationships among executive functions, metacognitive skills and educational achievement in 5 and 7 year-old children. *Metacognition & Learning 10*(2), 181-198.

Hattie, J. A., & Yates, G. C. (2014). Using feedback to promote learning. *Acknowledgments and Dedication*, 45, 45-58.

Jarvela, S., Jarvenoja, H., Malmberg, J., & Hadwin, A. F. (2013). Exploring socially shared regulation in the context of collaboration. *Journal of Cognitive Education and Psychology*, *12*(3), 267-286.

Kaunhoven, R. J., Dorjee, D. (2017). How does mindfulness modulate self-regulation in pre-adolescent children? An integrative neurocognitive review. *Neuroscience Biobehavioral Reviews, 74*, 163-184.

Kramarski, B., & Kohen, Z. (2017). Promoting preservice teachers' dual self-regulation roles as learners and as teachers: effects of generic vs. specific prompts. Metacognition and Learning, 12(2), 157-191.

National Research Council. (2015). *Identifying and supporting productive STEM programs in out-of-school settings.* Washington, D.C.: The National Academies Press.

OECD (2017), PISA 2015 Assessment and Analytical Framework: Science, Reading, Mathematic, Financial Literacy and Collaborative Problem Solving, revised edition, PISA, OECD Publishing, Paris.

Zimmerman, B. J. (2008). Investigating self-regulation and motivation: Historical background, methodological developments, and future prospects. *American Educational Research Journal, 45*(1), 166-183.

אפיון ההוראה של שיעורי פתרון בעיות בגיאומטריה בתיכון ברמות הגבוהות

<u>גורגינה פראנש</u>[1], **תקוה עובדיה**[1,2]

[1] אורנים – המכללה האקדמית לחינוך; [2] מכללה ירושלים

מבוא

מחקר זה התמקד באפיון הוראה של תהליכי פתרון בעיות גיאומטריות בעלות פוטנציאל לקידום התנהגות יצירתית בתהליך פתרון. בבסיס של המחקר עומדת התפיסה שניתן לטפח יצירתיות מתמטית במסגרת הוראה ולמידה בבית הספר ותפקידם של המורים למתמטיקה הוא מרכזי במשימה זו.

שאלת המחקר: האם וכיצד ניתן לאפיין הוראה מקדמת חשיבה יצירתית, באמצעות פתרון בעיות מרובות פתרונות בגיאומטריה איקלידית בשיעור מתמטיקה?

רקע תיאורטי

בספרות התיאורטית קיימות פרשנויות רבות המוצעות למושג "יצירתיות", התפלגותה באוכלוסייה, מוצאה וגילוייה בחוויה האנושית. המחקר הנוכחי מתבסס על הערכת יצירתיות לפי מדדי היצירתיות שהגדיר טורנס (Torrance, 1974): שטף היכולת להציע רעיונות וקישורים רבים ולהפיק תוצרים רבים ביחס לידע עולם קודם בתחום ובכלל. גמישות היכולת לתכנן ולחקור בעיה בכיוונים שונים, מקוריות היכולת לחשוב אחרת, לראות דברים באופן שונה, לפתור בעיות על ידי ארגון נתונים בדרך ייחודית ולפתח רעיונות ייחודיים. היכולת ליצור רעיון חדש מתוך איחוד של רעיונות קיימים ופירוט והרחבה של הבהרות והסברים לתאר את שטף הרעיונות או האסוציאציות. חשוב לציין שלא כל המרכיבים חייבים להופיע בכל פעילות יצירתית, אך חלקם ראוי שיבואו לידי ביטוי, וראוי שהמורים יהיו מודעים לקיומם ויבחינו בהם (לב-זמיר,2015).

גיאומטריה מהווה אחד הנושאים המרכזיים של תכנית הלימודים במתמטיקה לתיכון ומאפשרת בסיס לפתרון בעיות בדרכים שונות. במחקר הזה המורים נדרשו ליישם בהוראתם הוראה של בעיות בגיאומטריה איקלידית, בעלות מרחב פתרונות רב (Leikin, 2018) על מנת לזמן סביבה שיש לה פוטנציאל לפתח פתרונות יצירתיים של התלמידים.

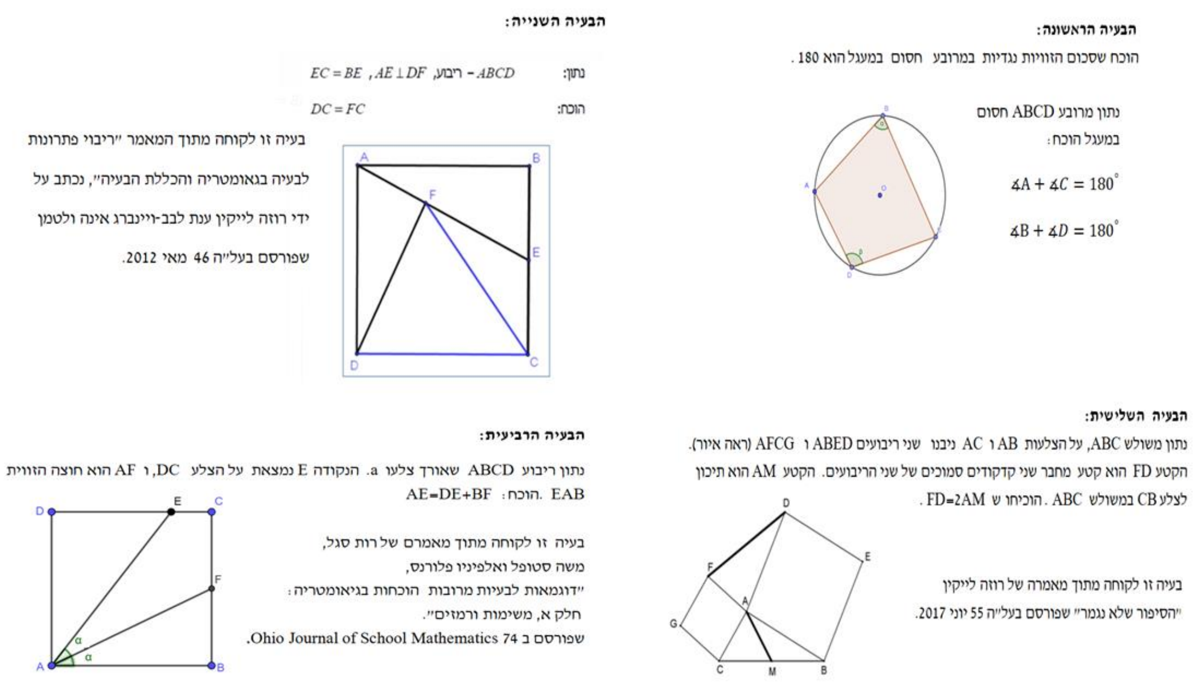
שיטה

במחקר השתתפו שלושה מורים ומורה אחת שמלמדים בשלושה בתי ספר תיכוניים בצפון הארץ ויש להם ותק של יותר מעשרים שנה בהוראת מתמטיקה, שניים מהם בעלי תואר שני בחינוך מתמטי וכולם רכזי מקצוע בבית הספר שהם מלמדים בו והמורה היא מדריכה ארצית במתמטיקה. המחקר התבצע בכיתות י' וי"א ברמה של 4 ו 5 יחידות לימוד.

בחרנו ארבע בעיות בגיאומטריה אוקלידית שמרחב הפתרונות שלהם רחב, ולדעתנו יש להן פוטנציאל להיות מקדמות התנהגות יצירתית (איור 1). ביקשנו מהמורים לנהל שיעור גיאומטריה סביב פתרון הבעיות. צפינו בשיעור ותיעדנו אותו (באישור).

איור 1

ארבע הבעיות שבחרנו להוראה.



הבעיות נבחרו מתוך מרחב בעיות שמצאנו במקורות שונים ונפתרו, מבינהן בחרנו את אלה שניתן ללמד אותן ולהגיע בשיעור למרחב פתרונות רב.

ניתוח הנתונים כלל ניתוח רב רבדי של תמלול התצפיות המתמקד בחיפוש מרכיבי היצירתיות בשיעור. ככל שסיטואציית שיעור רמזה למרכיבי יצירתיות, הבנו שהיא מייצגת התפתחות יצירתיות בכיתת המתמטיקה.

בנוסף, התבוננו במגוון הפתרונות של המורים ואפינו כל פתרון לפי מרכיבי היצירתיות.

ממצאים

ממצאי המחקר מצביעים על שני היבטים: האחד מתייחס למרחב הפתרונות של המורים כעדות לידע תוכן מתמטי עמוק, והשני מתייחס לזיהוי התפתחות התנהגות יצירתית בכיתה כגון:

ה"שטף" בכיתה נבנה באמצעות פעולות שביצעו המורים כדי לחבר ידע מתמטי קודם לידע חדש.

ה"גמישות" בדיונים קודמה על ידי "רמזים" מהמורה שגישרו בין מה שהתלמידים יכולים לעשות בדרכם לבין מה שהם יכולים לעשות בסיוע המורה. הלומדים יישמו באמצעות הרמזים רעיונות שונים, כפי שהם פענחו את הרמז באופן שונה.

ה"מקוריות" ברעיונות, בתשובות ובדיונים התפתחה בזכות הצבת שאלות או בניות עזר שהמורים עודדו לבצע. המללת החשיבה בכיתה בהסברי התלמידים, קידמה את רכיב ההרחבה ביצירתיות.

דיון ומסקנות

במחקר הנוכחי נבחרו בעיות שיש להם פוטנציאל לקדם יצירתיות, לאחר שמרחב הפתרונות שלהן היה רב, ונראה היה שהן כוללות רעיונות מתמטיים רבים ומגוונים, כך ששטף, גמישות ומקוריות עשויים להתפתח באמצעותן בדיונים ובשיח בכיתה.

מכיוון שבין ארבעת הממדים של יצירתיות, מקוריות היא התכונה שקשה יותר לפתח, והיא מתפתחת בעיקר מאינטראקציה חברתית (Lev-Zamir & Leiken, 2011 ; 2013), המחקר הנוכחי מנסה להציג סביבת למידה המקדמת אינטראקציה כיתתית מגוונת שניתן לזהות בה מרכיבים של יצירתיות.

רשימת מקורות

לב-זמיר, ח' (2015). הפוטנציאל היצירתי הטמון בבעיה לא שגרתית. בתוך א' גזית וד' פטקין (עורכים), *יצירתיות בפתרון בעיות במתמטיקה: אסטרטגיות, דילמות וטעויות* עמ' (77-18)תל-אביב: מכון מופ"ת.

לב-זמיר, ח' (2016) . בעיית חקר כמנוף לפיתוח יצירתיות. *מחקר ועיון בחינוך מתמטי*, 75-93

רובינסון, ק' (2013). *לצאת מהקווים. סודות החשיבה היצירתית.* ירושלים: כתר.

שחם, ח' ושורצקי, ח' (2016). *פיתוח יצירתיות ומצוינות בגן הילדים*.

שקדי, א' .(2003) *מילים המנסות לגעת -מחקר איכותני, תיאוריה ויישום*. תל אביב: רמות.

Torrance, E. P. (1974). *Torrance Tests of Creative Thinking (1966) 1974*. Scholastic testing service, Incorporated.

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education*, 13(1), 17-32.

Levav-Waynberg, A., & Leikin, R. (2009, January). Multiple solutions for a problem: A tool for evaluation of mathematical thinking in geometry. In *Proceedings of CERME* (Vol. 6, pp. 776-785).

Bahar, A. K., & Maker, C. J. (2011). Exploring the relationship between mathematical creativity and mathematical achievement. Asia-Pacific *Journal of Gifted and Talented Education*, 3(1), 33-48

Van Harpen, X. Y., & Sriraman, B. (2013). Creativity and mathematical problem posing: An analysis of high school students' mathematical problem posing in China and the USA. *Educational Studies in Mathematics*, 82(2), 201-221

Lev-Zamir, H., & Leikin, R. (2013). Saying versus doing: teachers' conceptions of creativity in elementary mathematics teaching. *ZDM*, 45(2), 295-308.

Shriki, A. (2010). Working like real mathematicians: Developing prospective teachers' awareness of mathematical creativity through generating new concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 73(2), 159-179.

Herro, D., & Quigley, C. (2017). Exploring teachers' perceptions of STEAM teaching through professional development: implications for teacher educators. *Professional Development in Education*, 43(3), 416-438.

Karwowski, M., Jankowska, D.M. & Szwajkowski, W. (2017). Creativity, Imagination, and Early Mathematics Education. In R. Leikin, B. Sriraman (eds.). *Creativity and Giftedness, Advances in Mathematics Education* (pp. 7-22). Switzerland: Springer

אינדקס

שם המרצה	פרטי התקשרות
אליאס דפנה	dafna.elias@gmail.com
אליצור צורית	tsurit123@gmail.com
אמיגה ירון	yaron.amiga@openu.ac.il
בן דור נעמה	naamabd@gmail.com
בסן צינצינטוס רונית	ronit.bassan@smkb.ac.il
ברקאי רותי	Ruthi.Barkai@smkb.ac.il
גרה בדראן יסמין	yasmin.ghb@gmail.com
דוד איובי יוחאי	uziel@ludan.co.il
דוראל לאה	lea.dorel@beitberl.ac.il
דלאשה רביע	rabea75@walla.co.il
דרייפוס טומי	TommyD@tauex.tau.ac.il
דרעי מריט	meritdr@gmail.com
הראל רז	harelraz@gmail.com
וידר מירלה	mirelaw@walla.co.il
וייסמן אילנה	waisman.ilana@gmail.com
וייסמן שולה	shulawe@gmail.com
וינגרדן מירב	merav.weingarden@gmail.com
יעקובסון אלעד	elad.yacobson@weizmann.ac.il
ירחי צילה	tzila.yarhi@weizmann.ac.il
כהן זהבית	zehavitk@technion.ac.il
מחאג'נה אחלאם	ahlamosh@yahoo.com
מסארווה חיריה	massarwe@technion.ac.il
נוריק יעל	yael.nurick@weizmann.ac.il
נח-סלע ליה	lianoahsella@gmail.com
סגל רותי	rutisegal@gmail.com
סגרה סבינה	sabine.segre@live.achva.ac.il
ספדי ראפע	rafi.safadi@gmail.com
עבדו רותם	rotem_abdu@yahoo.com
עואודה שחברי ג'והיינה	juhaina8@gmail.com
עובדיה תקוה	tikva_o@oranim.ac.il
עופרי עפרה	ofra99@gmail.com
פראנש ג'ורגינה	hannaf3003@gmail.com
קופרמן כלילה	klilacop.kc@gmail.com
קורופטוב אנטולי	anatoliko@gmail.com
רוזנסקי דינה	dina.rosenski@mail.huji.ac.il
רותם סיגל	sigal.h.rotem@gmail.com
רחמים מירית	miritra3@gmail.com
שוורץ גיל	schwartz.gil@gmail.com
שטיינברג אפל מאיה	mdapel@gmail.com
שיר קרני	shir karnishir@gmail.com
שריף-רסלאן אמל	amalras@arabcol.ac.il
שתיוי רוית	RavitS@cet.ac.il
תנעמי יחיאל	tanamiy@gmail.com